

Systematic Literature Review: Kemampuan Pembuktian Matematis

Niken Shofiana Dewi¹, Dadan Dasari²

^{1, 2} Program Studi Pendidikan Matematika, FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia,
Jl. Dr. Setiabudhi No. 229 Bandung, 40154, Jawa Barat, Indonesia
nikenshofianadewi@upi.edu

Abstract

Literature review research related to mathematical proving ability has never been done before. The aim of this research is to analyse qualitative studies related to mathematical proving abilities in 2015-2022. The research method used is Systematic Literature Review (SLR) with the PRISMA protocol for all research articles indexed in Google Scholar, Garuda, ERIC, and Semantic. The search strategy is adjusted to the selection criteria and involves several moderator variables, namely year of publication, level of education, journal index, research material, and type of proof studied. The data obtained is presented in a quantitative descriptive manner. The results in this SLR research show that studies related to mathematical proving ability have relatively increased despite having decreased in 2019 and 2021. The majority of studies were carried out at the tertiary level and dominated by algebraic material. The type of proof that is often researched is direct proof. Suggestions for future researchers are further studies related to proving abilities at the high school level with geometry material and other types of proof.

Keywords: Mathematical Proving Ability, Systematic Literature Review

Abstrak

Penelitian kajian literatur terkait kemampuan pembuktian matematis belum pernah dilakukan sebelumnya. Tujuan dalam penelitian ini adalah menganalisis studi-studi kualitatif terkait kemampuan pembuktian matematis pada tahun 2015-2022. Metode penelitian yang digunakan adalah *Systematic Literature Review* (SLR) dengan protokol PRISMA terhadap semua artikel hasil penelitian yang terindeks dalam Google Scholar, Garuda, ERIC, dan Semantic. Strategi pencarian disesuaikan dengan kriteria seleksi dan melibatkan beberapa variabel moderator yaitu tahun publikasi, jenjang pendidikan, indeks jurnal, materi penelitian, dan jenis pembuktian yang diteliti. Data yang diperoleh disajikan secara deskriptif kuantitatif. Hasil dalam penelitian SLR ini memperlihatkan bahwa studi terkait kemampuan pembuktian matematis relatif mengalami peningkatan meski sempat turun pada tahun 2019 dan 2021. Studi mayoritas dilakukan pada jenjang perguruan tinggi dan didominasi materi aljabar. Jenis pembuktian yang sering diteliti adalah pembuktian langsung. Saran untuk peneliti selanjutnya adalah studi lebih lanjut terkait kemampuan pembuktian di jenjang sekolah menengah dengan materi geometri serta jenis pembuktian lainnya.

Kata kunci: Kemampuan Pembuktian Matematis, Studi Literatur

Copyright (c) 2023 Niken Shofiana Dewi, Dadan Dasari

✉ Corresponding author: Dadan Dasari

Email Address: dadan.dasari@upi.edu (Jl. Dr. Setiabudhi No. 229 Bandung, 40154, Jawa Barat)

Received 12 December 2022, Accepted 05 January 2023, Published 08 January 2023

DoI: <https://doi.org/10.31004/cendekia.v7i1.1987>

PENDAHULUAN

Matematika tidak hanya berhubungan dengan permasalahan sehari-hari namun juga dengan penggunaan intuisi, nalar, dan imajinasi guna menemukan ide-ide baru serta menyelesaikan permasalahan yang menimbulkan teka-teki (Khan & Krell, 2019). Selain itu atas dasar logika yang membangun, matematika terdiri dari serangkaian kalimat yang sebagian besar berupa pernyataan dan baru bisa diakui kebenarannya apabila telah dibuktikan (Sumardyono, 2018). NCTM (2000) menyebutkan standar proses dalam pembelajaran matematika antara lain *problem solving*, *reasoning and proof*, koneksi, komunikasi serta representasi. Oleh karena itu, kemampuan penalaran dan pembuktian menjadi penting untuk diwujudkan sebagai hasil belajar matematika. Sejalan dengan

pernyataan NCTM (2003) yang secara eksplisit merekomendasikan kemampuan penalaran dan pembuktian pada standar bagian kedua dimana diharapkan setelah belajar matematika, kemampuan *reasoning*, membangun serta mengevaluasi argumen matematis dan mengembangkan apresiasi guna perhitungan dan penyelidikan matematis dapat dimiliki. Dengan demikian kemampuan pembuktian matematis merupakan satu dari beberapa kemampuan esensial yang perlu dikembangkan.

Pembuktian matematis diartikan sebagai kumpulan alasan dengan fungsi memperkuat atau menentang suatu pendapat, gagasan, maupun pendirian dan secara logis menunjukkan nilai kebenarannya (Susanto, 2011). Griffiths (Juandi, 2008) mendefinisikan pembuktian matematis sebagai cara pikir yang formal serta logis diawali dari aksioma kemudian bergerak maju melalui serangkaian langkah logis hingga sampai pada sebuah konklusi. Kedua pernyataan ini sekaligus mendukung pernyataan Hendana & Lestari (2021) dimana matematika memang pada hakikatnya terdiri dari sekumpulan teorema, premis, pernyataan, dan definisi yang telah terbukti benar. Dalam pembelajaran matematika, siswa diharapkan mampu membuktikan serta menunjukkan kebenaran suatu pernyataan. Sebagaimana Maya dan Sumarmo (dalam Noto et al., 2019) yang menyatakan bahwa kemampuan membuktikan sedianya diperoleh dan dimiliki siswa serta menjadi komponen penting dalam pembelajaran matematika. Meskipun demikian kemampuan membuktikan jarang sekali diasah sebagaimana mestinya. Penelitian Köğçe et al. (2010) menunjukan bahwa siswa masih berada di bawah tingkatan yang diharapkan dalam kemampuan pembuktian matematis mereka. Selain itu mahasiswa juga mengalami hal yang sama terkait dengan membuktikan suatu pernyataan matematis (Siallagan et al., 2021).

Indikator untuk kemampuan penalaran (*reasoning*) dan pembuktian matematis secara eksplisit diungkapkan oleh NCTM (2003) antara lain: 1) mengenal keduanya sebagai aspek mendasar pada matematika, 2) membuat serta memeriksa konjektur matematika, 3) mengelaborasi serta mengecek argumen ataupun bukti (*proof*) dalam matematika, dan 4) memilih serta menerapkan semua jenis penalaran dan metode pembuktian. Lestari (dalam Siallagan et al., 2021) menyatakan tiga indikator dalam kemampuan pembuktian matematis yakni memahami bukti matematis, mengkonstruksi bukti matematis, baik secara langsung, tidak langsung atau induksi matematika serta mengevaluasi bukti dengan menambahkan, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis. Selain itu ada dua kemampuan pembuktian matematis yang diungkapkan oleh Sumarmo (dalam Hendana & Lestari, 2021) yaitu kemampuan untuk membaca bukti dari pernyataan yang ada kemudian memberi alasan pada setiap langkah pembuktian dan kemampuan untuk mengonstruksi bukti dengan mengidentifikasi kalimat dan implikasinya, menyusun serta memanipulasi fakta guna menunjukkan pernyataan tersebut benar, dan juga membentuk koneksi antara fakta dan unsur yang akan dibuktikan. Apabila keduanya terpenuhi maka hal tersebut menunjukan kemampuan pembuktian matematis yang tinggi. Berdasarkan jenis metodenya pembuktian sendiri terbagi menjadi tiga yakni pembuktian langsung, tidak langsung (kontradiksi dan kontraposisi) serta induksi matematika (Juandi, 2008; Kusno, 2014). Pembuktian langsung lebih menggunakan beberapa aturan inferensi seperti silogisme,

modus ponens, dan modus tollens. Kusno (2014) menyatakan bahwa bukti langsung merupakan pembuktian menggunakan penyimpulan dengan memakai hipotesis-hipotesis secara langsung untuk sampai pada konklusinya, sedangkan bukti tidak langsung dimulai dengan asumsi negasi dari proporsi yang akan dibuktikan dan menunjukkan bahwa hal itu menuju pada suatu kontradiksi. Hine (dalam Firmasari & Sulaiman, 2019) mendefinisikan induksi matematika sebagai suatu metode pembuktian yang berbasis rekursi serta digunakan sebagai pembuktian dugaan yang mengklaim bahwa suatu pernyataan benar untuk himpunan bilangan bulat positif dari beberapa variabel.

Penelitian terkait kemampuan pembuktian matematis telah banyak dilakukan sebelumnya seperti penelitian Firmasari & Sulaiman, (2019); Hendana & Lestari, (2021); Nurrahmah & Karim, (2018); Perbowo & Pradipta, (2017); Wulandari & Lestari, (2021) serta penelitian-penelitian lainnya. Selanjutnya diperlukan suatu tinjauan lebih lanjut terkait dengan kemampuan pembuktian matematis untuk mendapatkan informasi yang lengkap dan komprehensif serta data yang sesuai. Selain itu, penelitian sebelumnya tentang Systematics Literature Review (SLR) terkait kemampuan penalaran oleh Ariati & Juandi (2022) juga menyarankan penelitian lebih lanjut terkait pembuktian matematis. Dengan demikian, peneliti bermaksud melakukan tinjauan sistematis menggunakan metode Systematics Literature Review (SLR). SLR adalah metode penelitian atau suatu riset yang dilakukan untuk menghimpun dan mengevaluasi penelitian yang berfokus pada suatu topik (Lusiana & Suryani, 2014; Triandini et al., 2019). Penelitian jenis ini dilakukan untuk merekognisi, menilai, dan menginterpretasikan temuan-temuan terkait topik riset tertentu, untuk menjawab pertanyaan riset yang telah ditentukan (Iskandar & Juandi, 2022; Lusiana & Suryani, 2014; Triandini et al., 2019). Selain itu SLR juga dapat membantu memberikan pemahaman lebih baik dan memantau *research trends* (Lame, 2019). Lusiana & Suryani (2014) juga menyatakan bahwa SLR dapat menjadi latar belakang yang bersifat teoritis untuk penelitian ke depannya, berguna sebagai acuan, bahan penelitian, atau menjawab pertanyaan terkait topik yang menarik dengan memahami penelitian-penelitian yang dilakukan sebelumnya.

Tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mengkaji literatur secara sistematis terkait kemampuan pembuktian matematis dengan memperhatikan beberapa hal yaitu tahun publikasi, jenjang Pendidikan, indeks jurnal, materi penelitian, serta hasil penelitian pada kemampuan pembuktian matematis. Oleh karena itu rumusan masalah penelitian ini meliputi:

1. Bagaimana deskripsi hasil penelitian mengenai kemampuan pembuktian matematis berdasarkan tahun publikasi?
2. Bagaimana deskripsi hasil penelitian mengenai kemampuan pembuktian matematis berdasarkan jenjang Pendidikan?
3. Bagaimana deskripsi hasil penelitian mengenai kemampuan pembuktian matematis berdasarkan indeks jurnal?
4. Bagaimana deskripsi hasil penelitian mengenai kemampuan pembuktian matematis berdasarkan materi penelitian?

5. Bagaimana deskripsi hasil penelitian mengenai kemampuan pembuktian matematis berdasarkan hasil penelitian pada kemampuan pembuktian matematis?

METODE

Systematic Literature Review

Systematic Literature Review dengan pendekatan deskriptif kuantitatif digunakan sebagai metode dalam penelitian. SLR dipilih dengan tujuan melakukan justifikasi yang berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya terkait kemampuan pembuktian matematis. Tahap penelitian ini mencakup pengumpulan data, analisis data, serta penarikan kesimpulan (Juandi & Tamur, 2020). Pada tahap pengumpulan data, peneliti menelusuri dan mengumpulkan data berupa penelitian primer yang dipublikasi pada artikel nasional maupun internasional. Database elektronik yang digunakan peneliti antara lain Google scholar, Garuda, ERIC, serta Semantic. Selanjutnya semua artikel diekstraksi dan hanya artikel relevan dan memenuhi kriteria inklusi saja yang akan dianalisis.

Kriteria Inklusi

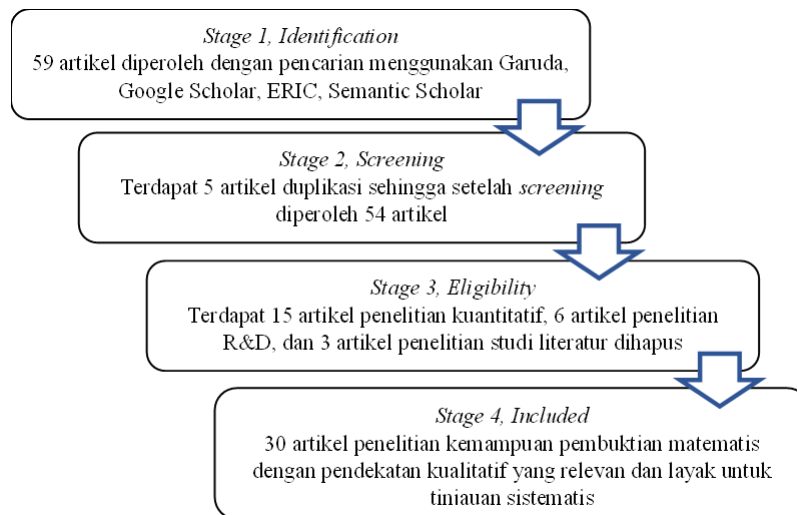
Kriteria inklusi yang dipergunakan antara lain: (1) Artikel dari hasil penelitian dalam Pendidikan matematika, (2) Artikel menganalisis tentang kemampuan pembuktian matematis, (3) Artikel dipublikasikan dalam rentang tahun 2015 – 2022, (4) Artikel harus memuat jenjang pendidikan sampel penelitian, (5) Artikel perlu mencantumkan materi penelitian. Artikel-artikel yang diperoleh tetapi tidak memenuhi kriteria inklusi maka akan dikeluarkan dari proses studi literatur sistematis ini.

Instrumen Penelitian

Instrumen penelitian yang digunakan adalah protokol berkaitan dengan kriteria inklusi dan eksklusi yang bisa berupa lembar observasi. Kriteria-kriteria tersebut berdasarkan tahun terbit, jenjang Pendidikan, indeks jurnal, dan materi yang digunakan. Protokol yang digunakan dalam SLR ini adalah PRISMA (*Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyzes*). Proses seleksi yang dilakukan mengacu pada empat tahap dalam PRISMA yakni *identification*, *screening*, *eligibility*, dan *included* (Liberati et al., 2009).

Populasi dan Sampel

Populasi dalam penelitian ini adalah semua artikel tentang kemampuan pembuktian matematis atau kemampuan dalam membuktikan yang dipublikasikan pada jurnal terindeks baik nasional maupun internasional. Berdasarkan pencarian menggunakan kata kunci yang dimaksud pada mesin pencari, didapati sebanyak 59 artikel sebagai sampel, terdiri atas 30 penelitian menggunakan pendekatan kualitatif. Berikut diagram PRISMA pada penelitian ini:



Gambar 1. Diagram PRISMA Studi Kemampuan Pembuktian Matematis

HASIL DAN DISKUSI

Hasil dalam penelitian ini berupa analisis dan ringkasan artikel yang didokumentasikan sebelumnya terkait kemampuan pembuktian matematis. Setelah diterapkan inklusi dan diperoleh 30 artikel relevan, artikel dikategorikan lebih lanjut berdasarkan karakteristik studi atau variabel moderator. Variabel moderator dalam penelitian ini antara lain tahun publikasi, jenjang Pendidikan, indeks jurnal, dan materi yang digunakan. Keragaman penelitian tentang kemampuan pembuktian matematis berdasarkan karakteristik studi akan disajikan pada Tabel 1.

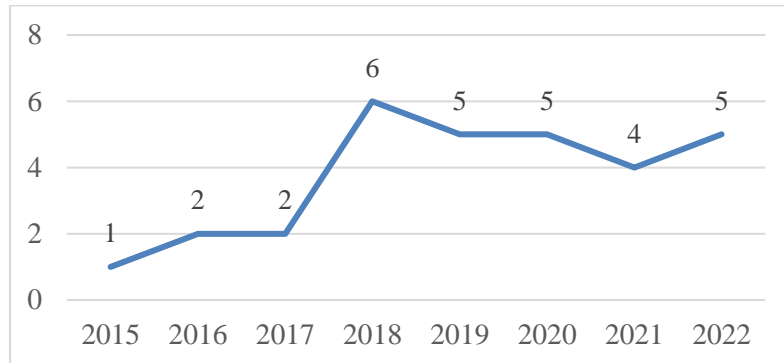
Tabel 1. Jumlah Studi Berdasarkan Kriteria

Studi Karakteristik	Kriteria	Frekuensi
Tahun Publikasi	2015	1
	2016	2
	2017	2
	2018	6
	2019	5
	2020	5
	2021	4
	2022	5
Jenjang Pendidikan	SMP	3
	SMA	2
	PT	25
Indeks Jurnal	S1	1
	S2	0
	S3	8
	S4	9
	S5	4
	S6	1
	Google Scholar	7
Materi Penelitian	Aljabar	18
	Geometri	5
	Matematika Diskrit	7

Selanjutnya akan dideskripsikan tiap-tiap studi berdasarkan pada kriteria yang sebelumnya ditetapkan.

Tahun Publikasi

Artikel yang menjadi sampel dalam penelitian ini dipublikasikan mulai tahun 2015 sampai 2022. Berikut diagram sebaran studi primer mulai tahun 2015 sampai tahun 2022.

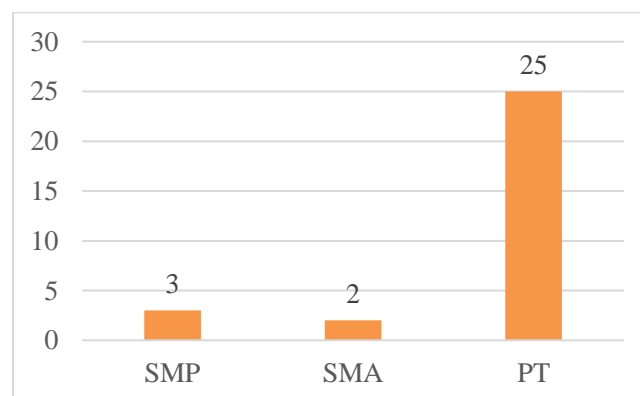


Gambar 2. Data Penelitian Kemampuan Pembuktian Matematis Berdasarkan Tahun Publikasi

Dari Gambar 2. didapatkan kesimpulan bahwa frekuensi studi terkait kemampuan pembuktian matematis yang dipublikasikan dari tahun 2015 sampai 2022 relatif mengalami peningkatan meski sempat turun pada tahun 2019 dan 2021. Studi dengan pendekatan kualitatif terkait kemampuan pembuktian matematis paling banyak dipublikasikan pada tahun 2018. Peningkatan yang ada dapat disebabkan adanya muatan tentang penalaran dan pembuktian pada buku teks siswa yang memberikan *statement* perlunya kemampuan tersebut untuk diasah pada pembelajaran matematika. Penelitian (Utari & Hartono, 2019) yang mengkaji tentang muatan tersebut juga menemukan beberapa sifat dan konjektur yang mendukung pembuktian di jenjang sekolah menengah atas pada buku teks matematika tahun 2016. Selain itu buku teks kurikulum 2013 edisi revisi juga (Kemendikbud, 2017) memuat konten serupa. Hal ini semakin menekankan pentingnya kemampuan pembuktian matematis dalam pembelajaran matematika sehingga riset-riset terkait topik tersebut juga relatif meningkat.

Jenjang Pendidikan

Studi terkait kemampuan pembuktian matematis yang dijadikan data dalam penelitian ini dilakukan dari jenjang SMP sampai perguruan tinggi dengan rincian sebaran pada Gambar 3.



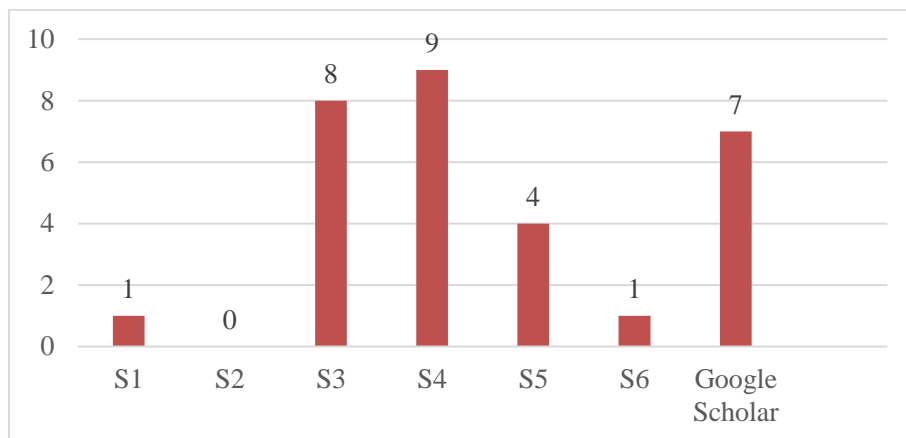
Gambar 3. Data Penelitian Kemampuan Pembuktian Matematis Berdasarkan Jenjang Pendidikan

Dari Gambar 3 dapat diketahui bahwa kemampuan pembuktian matematis paling banyak

diteliti adalah jenjang perguruan tinggi dengan 25 penelitian, sedangkan untuk jenjang SMP sebanyak 3 penelitian dan paling sedikit jenjang SMA dengan 2 penelitian. Kemampuan pembuktian matematis lebih sering dikaji di jenjang perguruan tinggi dikarenakan perlunya kemampuan tersebut dimiliki oleh mahasiswa terutama calon guru matematika. Hal ini sejalan dengan Blanton et al., (2003); Selden & Selden, (2007); Shaker & Berger, (2016); Siswono et al., (2020); Smith, (2006) yang menyatakan bahwa pembuktian formal adalah komponen penting yang harus dimiliki dan dikembangkan oleh mahasiswa. Selain itu pentingnya wawasan mahasiswa yang dalam hal ini calon guru matematika tentang kontruksi pembuktian harus mampu memfasilitasi siswa serta membantu mereka meningkatkan kemampuan tersebut (Carrillo-Yañez et al., 2018; Stylianides, 2007). Sedangkan kemampuan pembuktian matematis ini merupakan kemampuan mendasar yang seharusnya juga dimiliki oleh siswa yang belajar matematika berdasarkan NCTM (2000) dan penelitian Noto et al. (2019). Jadi, selain dikaji pada jenjang perguruan tinggi kemampuan pembuktian matematis juga perlu dikaji lebih lagi pada jenjang Pendidikan menengah.

Indeks Jurnal

Rincian sebaran artikel terkait kemampuan pembuktian matematis dengan pendekatan kualitatif berdasarkan indeks jurnal disajikan pada Gambar 4 berikut ini.

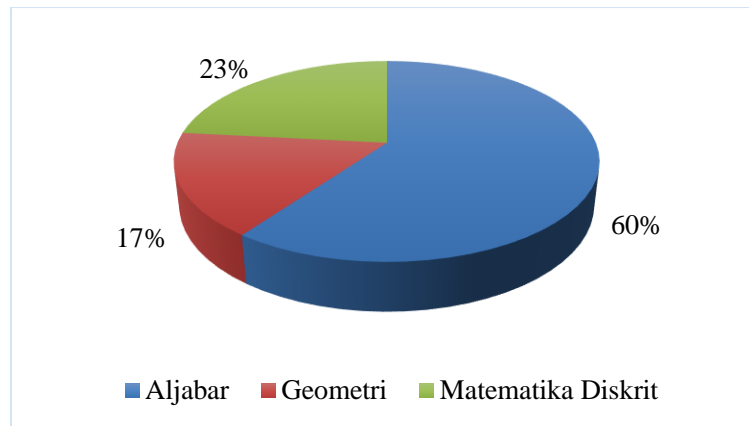


Gambar 4. Data Penelitian Kemampuan Pembuktian Matematis Berdasarkan Indeks Jurnal

Dari Gambar 4 dapat diketahui bahwa hasil studi terkait kemampuan pembuktian matematis mayoritas dipublikasikan pada jurnal nasional terindeks Sinta 4 sementara untuk jurnal terindeks Sinta 2 belum ada.

Materi Penelitian

Berdasarkan materi penelitian, studi literatur ini dibagi menjadi tiga yaitu aljabar, geometri, dan matematika diskrit. Rincian sebaran studi berdasarkan materi penelitian disajikan pada Gambar 5.



Gambar 5. Data Penelitian Kemampuan Pembuktian Matematis Berdasarkan Materi Penelitian

Dari Gambar 5, dapat disimpulkan bahwa penelitian terkait kemampuan pembuktian matematis didominasi oleh materi aljabar sebesar 60%. Sedangkan untuk materi tentang geometri paling sedikit dilakukan yaitu 17%. Aljabar menjadi materi penelitian yang paling sering dikaji dikarenakan materi ini mendominasi kurikulum matematika sekolah. Seperti dalam Permendikbud No. 24 tahun 2016 dimana penguasaan konsep serta keterampilan aljabar menjadi salah satu tuntutan kurikulum Indonesia dengan harapan kemampuan ini dapat diterapkan baik dalam menyelesaikan masalah matematis maupun masalah sehari-hari. Sebagai tambahan, Usiskin (1995) juga memaparkan pentingnya aljabar dalam matematika terutama dalam menyelesaikan permasalahan matematis dan tidak dapat diselesaikan tanpa aljabar. Aljabar yang banyak ditemukan pada riset-riset ini mencakup beberapa mata kuliah seperti analisis real, aljabar abstrak, dan struktur aljabar. Ketiga mata kuliah ini memang berkaitan erat penggunaan aksioma, definisi, serta pembuktian teorema yang tentunya membutuhkan adanya kemampuan pembuktian matematis (Hardianti et al., 2020; Kartika & Yazidah, 2019; Novyta, 2022). Padahal selain aljabar, geometri juga berkaitan erat dengan pengembangan kemampuan pembuktian dan penalaran dimana pengembangan kemampuan tersebut menjadi salah satu tujuan fundamental dalam matematika khususnya geometri (Ben-Ari, 2012; Bulut & Bulut, 2012; Coronado et al., 2017; Noto et al., 2019; Nuthall & Old, 2018; Yudianto et al., 2021).

Hasil Penelitian pada Kemampuan Pembuktian Matematis

Berdasarkan studi literatur ini ditemukan bahwa sebagian mahasiswa maupun siswa sudah mampu melakukan pembuktian matematis (Adamura & Susanti, 2018; Faizah et al., 2022; Firmasari & Sulaiman, 2019; W. O. Handayani & Rahaju, 2018; Hermanto et al., 2016; Hidayati & Wahyuni, 2020; Maulana et al., 2021; Muliawati, 2018; Multahadah & Mardhotillah, 2022; Novyta, 2022; Perbowo & Pradipta, 2017; Sutiarto, 2019; Waluyo & Sari, 2017; Wulandari & Lestari, 2021; Yohanie et al., 2016) meskipun masih diungkapkan beberapa kesulitan yang dialami siswa maupun mahasiswa seperti pada penelitian (Dadan Sundawan et al., 2018; U. F. Handayani et al., 2022; Kiik et al., 2021; Novyta, 2022; Perbowo & Pradipta, 2017; Waluyo & Sari, 2017; Yazidah et al., 2022). Sedangkan penelitian (Putri Hendana & Lestari, 2021) dan (Hardianti et al., 2020) mengungkapkan bahwa kemampuan pembuktian matematis siswa SMP dan mahasiswa masih berada pada kategori

rendah. Penelitian Sutiarto (2019) mengungkapkan kemampuan pembuktian matematis berdasarkan gender dalam menyelesaikan pembuktian terkait grup dimana diperoleh bahwa mahasiswa perempuan lebih tinggi dalam hal kefasihan dan fleksibilitas sedangkan mahasiswa laki-laki unggul dalam originalitas pembuktian.

Berdasarkan jenis pembuktian yang diperoleh pada hasil penelitian, ditemukan tiga jenis pembuktian serta gabungan dua jenis pembuktian dalam satu penelitian yaitu pembuktian langsung dan tidak langsung. Sebaran jenis penelitian disajikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Data Penelitian Berdasarkan Jenis Pembuktian

Jenis Pembuktian	Frekuensi
Langsung	22
Tidak Langsung	0
Induksi Matematika	2
Langsung dan Tidak Langsung	6

Secara umum *mindset* pembuktian dalam matematika memang dibagi menjadi dua, yakni deduktif dan induktif. Pembuktian deduktif memuat pembuktian langsung dan pembuktian tidak langsung (dengan kotraposisi atau kontradiksi) (Baki, 2008; Siswono et al., 2020). Pembuktian matematis pada jenjang sekolah dasar menggunakan *mindset* induktif, sementara pada jenjang perguruan tinggi sudah menggunakan *mindset* deduktif (Sutiarto, 2019). Sejalan juga dengan pendapat (Sari, 2016) bahwa pembuktian yang bersifat deduktif lebih sulit dibanding pembuktian yang bersifat induktif dan biasanya memang dikembangkan pada jenjang perguruan tinggi. Dengan demikian sesuai dengan jenjang yang sebelumnya paling banyak dikaji yaitu perguruan tinggi sehingga pembuktian yang menggunakan *mindset* deduktif seperti pembuktian langsung menjadi yang paling sering diteliti. Selain itu (Wolf, 1998) juga menggolongkan pembuktian langsung dan tidak langsung dalam aturan inferensi yang digunakan dalam pembuktian proposisi atau pernyataan dalam matematika, sehingga pembuktian jenis ini memang paling sering digunakan. Meski demikian, pembuktian tidak langsung lebih cocok digunakan untuk pernyataan yang berupa negasi (Wolf, 1998). Pembuktian dengan induksi matematika juga terbatas penggunaannya, yakni pada semesta bilangan asli dengan membuktikan kebenaran suatu pernyataan berbasis rekursi (Hine, 2017; Tarhadi et al., 2006). Sementara itu, pada salah satu indikator pembuktian yang diungkapkan oleh NCTM (2003) dan Lestari (dalam Siallagan et al., 2021) adalah menggunakan berbagai jenis pembuktian yaitu langsung, tidak langsung, dan induksi matematika. Dengan demikian, penelitian terkait pembuktian lain juga dirasa perlu dilakukan.

Sebagian besar penelitian terkait kemampuan pembuktian matematis mengacu pada indikator penalaran matematis oleh NCTM (2003), Selden & Selden (2003), dan Lestari (2015) dengan beberapa modifikasi yang disesuaikan dengan materi penelitian. Seperti pada penelitian (Hidayati & Wahyuni, 2020) yang memodifikasi indikator dengan beberapa kriteria dalam materi parabola. Beberapa contoh hasil penelitian sebelumnya mengungkapkan bahwa kemampuan pembuktian

matematis rendah menunjukkan ketidakmampuan memahami alur pembuktian serta menyusun rencana pembuktian (Firmasari & Sulaiman, 2019; Hendana & Lestari, 2021), kemampuan pembuktian matematis tinggi dan sedang sudah mampu melakukan pembuktian dengan benar meski untuk kategori sedang masih ada beberapa pembuktian yang kurang lengkap (Firmasari & Sulaiman, 2019; Muliawati, 2018; Multahadah & Mardhotillah, 2022; Novyta, 2022; Sutiarso, 2019; Suwanti & Fayeldi, 2018; Yohanie et al., 2016).

Beberapa penelitian tentang kemampuan pembuktian matematis juga dikaitkan dengan tinjauan lain seperti penelitian (Kartika & Yazidah, 2019) yang mendeskripsikan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa berdasarkan Adversity Quotient dimana diperoleh bahwa mahasiswa Camper lebih mampu melakukan pembuktian dibanding mahasiswa Climber dan Quitter. Ditinjau dari tingkat *resilience* diperoleh bahwa siswa tingkat *resilience* tinggi dapat memenuhi seluruh indikator pembuktian matematis sedangkan siswa dengan tingkat *resilience* sedang mampu memenuhi sebagian indikator (Hidayati & Wahyuni, 2020). Berdasarkan kemampuan spasial diketahui bahwa siswa dengan kemampuan spasial tinggi memiliki proses pembuktian yang baik, siswa berkemampuan spasial sedang memiliki proses pembuktian yang sedang juga, sedangkan siswa kemampuan spasial rendah belum mampu melakukan pembuktian (Maulana et al., 2021). Selain itu berdasarkan kemampuan berpikir intuitif diperoleh bahwa mahasiswa intuitif tinggi mampu membuktikan dengan sempurna, intuitif sedang mampu merencanakan namun melakukan kesalahan pada penyelesaian, intuitif rendah tidak mampu membuat perencanaan penyelesaian (Adamura & Susanti, 2018).

KESIMPULAN

Berdasarkan pemaparan hasil serta pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan bahwa penelitian terkait kemampuan pembuktian matematis dengan jenis pembuktian langsung paling banyak diteliti, untuk jenis pembuktian lain seperti pembuktian tidak langsung dan induksi matematika masih kurang diminati karena hanya cocok diterapkan pada pembuktian tertentu bergantung pada semesta dan jenis pernyataan yang akan dibuktikan. Publikasi terkait kemampuan pembuktian matematis relatif mengalami peningkatan dalam kurun waktu 2015-2022 meski sempat menurun pada tahun 2019 dan 2021, peningkatan ini sejalan dengan semakin banyaknya muatan tentang pembuktian pada kurikulum sekolah maupun perguruan tinggi. Studi ini mayoritas dilakukan pada jenjang perguruan tinggi karena pada jenjang inilah pentingnya kemampuan pembuktian lebih ditekankan. Materi aljabar mendominasi sebagai materi penelitian karena banyaknya proporsi dalam kurikulum sekolah terutama perguruan tinggi yang memuat pembuktian sehingga membutuhkan adanya kemampuan pembuktian matematis. Saran untuk peneliti selanjutnya agar lebih mengembangkan juga studi terkait kemampuan pembuktian matematis di jenjang sekolah menengah serta materi geometri yang sedikit diteliti. Selain itu penelitian terkait kesulitan dalam pembuktian matematis sepertinya masih bisa dikaji lebih lanjut.

REFERENSI

- Adamura, F., & Susanti, V. D. (2018). Penalaran Matematis Mahasiswa dalam Memecahkan Masalah Analisis Real Berdasarkan Kemampuan Berpikir Intuitif. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 8(2), 156–172. <https://jurnal.uns.ac.id/jmme>
- Ariati, C., & Juandi, D. (2022). Kemampuan Penalaran Matematis: Systematic Literature Review. *LEMMA: Letters Of Mathematics Education*, 8(2), 61–75.
- Baki, A. (2008). *Mathematics education from theory to practice*. Harf Educational Publication.
- Ben-Ari, M. (2012). *Mathematical Logic for Computer Science* (3rd Edition). Springer-Verlag.
- Blanton, M. L., Stylianou, D. A., & David, M. M. (2003). The Nature of Scaffolding in Undergraduate Students' Transition to Mathematical Proof. *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the International Group for Psychology in Mathematics Education*, 113–120.
- Bulut, N., & Bulut, M. (2012). Development of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Geometric Thinking Levels Through an Undergraduate Geometry Course. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46, 760–763. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.05.194>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Coronado, W. A., Luna, C. A., & Tarepe, D. A. (2017). Improving Students' Van Hiele and Proof-Writing Ability using Geometer's Sketchpad. *Journal of Social Sciences (COES&RJ-JSS)*, 6(2), 55–74. <http://centrefexcellence.net/J/JSS/JSS%20Mainpage.htm>
- Dadan Sundawan, M., Dewi, I. L. K., & Noto, M. S. (2018). Kajian Kesulitan Belajar Mahasiswa dalam Kemampuan Pembuktian Matematis Ditinjau Dari Aspek Epistemologi pada Mata Kuliah Geometri Transformasi. *Jurnal Inovasi Pendidikan Dan Pembelajaran Matematika*, 4(1), 13–26.
- Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, & Rahardi, R. (2022). Constructing Students' Thinking Process through Assimilation and Accommodation Framework. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(1), 253–269.
- Firmasari, S., & Sulaiman, H. (2019). Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Induksi Matematika. *Journal of Medives: Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, 3(1), 1–9. <https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v3i1.642>
- Handayani, U. F., Hakim, W., & Putri, A. O. (2022). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Identitas Trigonometri. *Journal Focus Action of Research Mathematic (Factor M)*, 4(2), 27–42. https://doi.org/10.30762/factor_m.v4i2.4146
- Handayani, W. O., & Rahaju, E. B. (2018). Proses Berpikir Siswa Dalam Pengajuan Soal Matematika Ditinjau dari Gaya Kognitif Field Dependent dan Field Independent. *MATHEdunesa*, 7(2).

- Hardianti, S., Tayeb, T., Nur, F., & Farham Majid, A. (2020). The Analysis of Mathematical Proof Ability. *Matematika Dan Pembelajaran*, 8(2), 102–111. <https://doi.org/10.33477/mp.v8i2.1528>
- Hendana, I. P., & Lestari, K. E. (2021). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis pada Materi Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel. *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 178–184. <http://conference.unsika.ac.id/index.php/sesiomadika/Sesiomadika2021>
- Hermanto, Kodirun, & Anggo, M. (2016). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Siswa SMA Terhadap Matriks Ditinjau Dari Pengetahuan Awal Matematika. *Jurnal Pembelajaran Berpikir Matematika*, 1(2), 11–18.
- Hidayati, D. W., & Wahyuni, A. (2020). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Parabola Menggunakan Guided Learning Berdasarkan Tingkat Resiliensi. *Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika (JIPM)*, 2(2), 121–130. <https://doi.org/10.37729/jipm.v2i2.6713>
- Hine, G. (2017). Proof by Mathematical Induction: Professional Practice for Secondary Teachers. *26th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*, 125–132. https://researchonline.nd.edu.au/edu_conference/106.
- Iskandar, R. S. F., & Juandi, D. (2022). Study Literature Review: Realistic Mathematics Education Learning on Students' Mathematical Creative Thinking Ability. *SJME (Supremum Journal of Mathematics Education)*, 6(1), 35–42. <https://doi.org/10.35706/sjmev6i1.5739>
- Juandi, D. (2008). Pembuktian, Penalaran, dan Komunikasi Matematik. *Jurnal Pendidikan Matematika FPMIPA UPI*.
- Juandi, D., & Tamur, M. (2020). *Pengantar Meta Analisis*. UPI Press.
- Kartika, E. D., & Yazidah, N. I. (2019). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis pada Matakuliah Analisis Real Berdasarkan Adversity Quotient. *Prima: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 152–157.
- Kemendikbud. (2017). *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas X* (Edisi Revisi 2017). Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- Khan, S., & Krell, M. (2019). Scientific Reasoning Competencies: a Case of Preservice Teacher Education. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19(4), 446–464. <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00063-9>
- Kiik, O. K., Mamoh, O., & Amsikan, S. (2021). Analisis Kesulitan Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Pembuktian Teorema Grup. *MATH-EDU: Jurnal Ilmu Pendidikan Matematika*, 7(2), 122–132.
- Köğçe, D., Aydin, M., & Yildiz, C. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.370>
- Kusno. (2014). *Geometri*. Jember University Press.

- Lame, G. (2019). Systematic literature reviews: An introduction. *Proceedings of the International Conference on Engineering Design, ICED, 2019-August*, 1633–1642. <https://doi.org/10.1017/dsi.2019.169>
- Lestari, K. E. (2015). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif pada Mata Kuliah Analisis Real. *Mendidik: Jurnal Kajian Pendidikan Dan Pengajaran*, 1(2), 128–135.
- Liberati, A., Altman, D. G., Tetzlaff, J., Mulrow, C., Gøtzsche, P. C., Ioannidis, J. P. A., Clarke, M., Devereaux, P. J., Kleijnen, J., & Moher, D. (2009). The PRISMA statement for reporting systematic reviews and meta-analyses of studies that evaluate healthcare interventions: explanation and elaboration. *BMJ (Clinical Research Ed.)*, 339. <https://doi.org/10.1136/bmj.b2700>
- Lusiana, & Suryani, M. (2014). Metode SLR untuk Mengidentifikasi Isu-Isu dalam Software Engineering. *SATIN (Sains Dan Teknol. Informasi)*, 3(1), 1–11. <http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp>
- Maulana, A., Susiswo, & Susanto, H. (2021). Proses Penalaran dan Pembuktian Matematis Peserta Didik Ditinjau Dari Perbedaan Kemampuan Spasial. *Jurnal Pendidikan Matematika Undiksha*, 12(1), 10–16.
- Muliawati, N. E. (2018). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Memecahkan Masalah Pembuktian Grup Berdasarkan Langkah Polya. *Jurnal Pendidikan Dan Pembelajaran Matematika (JP2M)*, 4(2), 32–42.
- Multahadah, C., & Mardhotillah, B. (2022). Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Matematika pada Mata Kuliah Teori Bilangan. *Jurnal Gamma-Pi*, 4, 36–40.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- NCTM. (2003). *Standards for Secondary Mathematics Teacher*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Noto, M. S., Priatna, N., & Dahlan, J. A. (2019). Mathematical Proof: the Learning Obstacles of Pre-Service Mathematics Teachers on Transformation Geometry. *Journal on Mathematics Education*, 10(1), 117–126. <https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5379.117-126>
- Novyta. (2022). Profil Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa dalam Mata Kuliah Aljabar Abstrak. *Theorems*, 7(1), 56–64.
- Nurrahmah, A., & Karim, A. (2018). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis pada Matakuliah Teori Bilangan. *Jurnal Edumath*, 4(2), 21–29.
- Nuthall, P. L., & Old, K. M. (2018). Intuition, the farmers' primary decision process. A review and analysis. *Journal of Rural Studies*, 58, 28–38. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jrurstud.2017.12.012>

- Perbowo, K. S., & Pradipta, T. R. (2017). Pemetaan Kemampuan Pembuktian Matematis sebagai Prasyarat Mata Kuliah Analisis Riil Mahasiswa Pendidikan Matematika. *Kalamatika: Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1), 81–90.
- Sari, D. P. (2016). Berpikir Matematis dengan Metode Induktif, Deduktif, Analogi, Integratif, dan Abstrak. *Delta-Pi: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 5(1), 79–89.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36.
- Selden, A., & Selden, J. (2007). Overcoming Students' Difficulties in Learning to Understand and Construct Proofs. *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 246–259.
- Shaker, H., & Berger, M. (2016). Students' Difficulties with Definitions in the Context of Proofs in Elementary Set Theory. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 20(1), 80–90. <https://doi.org/10.1080/10288457.2016.1145449>
- Siallagan, F., Sinaga, B., & Rajagukguk, W. (2021). Analisis Kemampuan Penalaran dan Berpikir Kreatif Matematis Siswa dalam Pembelajaran Penemuan Terbimbing. *Paradikma: Jurnal Pendidikan Matematika*, 14(1), 68–74.
- Siswono, T. Y. E., Hartono, S., & Kohar, A. W. (2020). Deductive or inductive? prospective teachers' preference of proof method on an intermediate proof task. *Journal on Mathematics Education*, 11(3), 417–438. <https://doi.org/10.22342/jme.11.3.11846.417-438>
- Smith, J. C. (2006). A Sense-Making Approach to Proof: Strategies of Students in Traditional and Problem-Based Number Theory Courses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 73–90. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.005>
- Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. In *Educational Studies in Mathematics* (Vol. 65, Issue 1, pp. 1–20). <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0>
- Sumardyono. (2018). Kemampuan Guru dalam Menyusun Bukti Matematis. *Indonesian Digital Journal of Mathematics and Education*, 5(8), 510–522. <http://idealmathedu.p4tkmatematika.org>
- Susanto, H. A. (2011). Pemahaman Pemecahan Masalah Pembuktian Sebagai Sarana Berpikir Kreatif. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, Dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta*, 189–196.
- Sutiarso, S. (2019). The Ability of Students' Mathematical Proof in the Introduction to Group Theory in terms of Gender Differences. *Jurnal Pendidikan MIPA*, 20(2), 60–67. <https://doi.org/10.23960/jpmipa/v20i2.pp60-67>

- Suwanti, V., & Fayeldi, T. (2018). Analisis Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika dalam Menyelesaikan Masalah Pembuktian Pernyataan Matematika. *Jurnal Tadris Matematika*, 1(2), 175–184. <https://doi.org/10.21274/jtm.2018.1.2.175-184>
- Tarhadi, Sugilar, & Pujiastuti, S. L. (2006). Perbandingan Kemampuan Penyelesaian Masalah Matematika Mahasiswa Pendidikan Jarak Jauh dengan Mahasiswa Pendidikan Tatap Muka. *Jurnal Pendidikan Terbuka Dan Jarak Jauh*, 7(2), 121–133.
- Triandini, E., Jayanatha, S., Indrawan, A., Putra, G. W., & Iswara, B. (2019). Metode Systematic Literature Review untuk Identifikasi Platform dan Metode Pengembangan Sistem Informasi di Indonesia. *Indonesian Journal of Information Systems (IJIS)*, 1(2), 63–77. <https://www.google.com>
- Usiskin, Z. (1995). Why Is Algebra Important to Learn. *American Educator*, 19.
- Utari, T., & Hartono, H. (2019). Muatan Penalaran dan Pembuktian Matematis pada Buku Teks Matematika SMA Kelas X Kurikulum 2013. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 6(1), 1–13. <https://doi.org/10.21831/jrpm.v6i1.17002>
- Waluyo, M., & Sari, C. K. (2017). Kesalahan Penalaran dalam Pembuktian Masalah Struktur Aljabar. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika (JIPMat)*, 2(2), 116–121.
- Wolf, R. S. (1998). *Proof, Logic, and Conjecture : The Mathematician's Toolbox*. W.H. Freeman and Company.
- Wulandari, T. S., & Lestari, K. E. (2021). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Siswa Pada Materi Operasi Himpunan. *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 339–346. <http://conference.unsika.ac.id/index.php/sesiomadika/Sesiomadika2021>
- Yazidah, N. I., Sulistyorini, Y., & Kartika, E. D. (2022). Analisis Kesalahan dalam Pembuktian Teorema Bilangan Bulat pada Mahasiswa IKIP Budi Utomo Malang. *Journal Focus Action of Research Mathematic (Factor M)*, 4(2), 17–26. https://doi.org/10.30762/factor_m.v4i2.3903
- Yohanie, D. D., Sujadi, I., & Usodo, B. (2016). Proses Berpikir Mahasiswa Pendidikan Matematika dalam Pemecahan Masalah Pembuktian Tahun Akademik 2014/2015. *JMEE: Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 6(1), 79–90.
- Yudianto, E., Dewi, N. S., & Setiawan, T. B. (2021). Berpikir Siswa Level Deduksi dalam Membuktikan Teorema Kesebandingan Segitiga dan Konversnya Berdasarkan Langkah-Langkah Polya. *Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1), 61–74. <https://doi.org/10.33654/math.v7i1.1199>