

Analisis Proses Pemahaman Relasional Mahasiswa Ditinjau dari Kesulitan dalam Menyelesaikan Soal Induksi Matematika

Umi Dristian^{1✉}, Abd Qohar², I Made Sulandra³, Lathiful Anwar⁴

^{1,2,3,4} S2 Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang
Jl. Semarang No.5, Malang, Indonesia
umidristian21@email.com

Abstract

Understanding is an understanding of the procedures or concepts used to solve problems and knowing the reasons for using these procedures or concepts. Solving math induction problems requires a better relational understanding because students often experience difficulties in the proof process. Therefore, the purpose of this study is to analyze and describe the process of students' relational understanding in terms of difficulties in solving mathematical induction problems. This research approach is descriptive qualitative. The research subjects were students of mathematics education at State University of Malang. The research instruments used were test questions and interview guidelines. The results of the study concluded that students already have a good relational understanding, this is evidenced by the answers in working on math induction questions. The subject is able to carry out the procedure as a whole well in both the base and induction steps and get the right answers. However, in working on the test questions, the subject still experienced difficulties in the induction step, especially in proving the $n=k+1$ assumption to be true. This was confirmed by the subject through interviews, that the subject experienced difficulties in the induction step. In addition, the subject also said that there were several factors that caused difficulties in working on induction questions including a lack of understanding of questions and mastery of prerequisite materials such as weak induction, arithmetic series, algebra, fractions and exponents. However, overall, the subject's relational understanding is good, because it can explain the procedure and the reasons for using it in solving mathematical induction problems.

Keywords: Mathematical induction, difficulty, Relational understanding

Abstrak

Pemahaman adalah pemahaman mengenai prosedur atau konsep yang digunakan untuk menyelesaikan soal serta mengetahui alasan menggunakan prosedur atau konsep tersebut. Dalam menyelesaikan soal induksi matematika membutuhkan pemahaman relasional yang lebih baik karena seringkali mahasiswa mengalami kesulitan dalam proses pembuktian. Oleh sebab itu tujuan penelitian ini menganalisis dan mendeskripsikan proses pemahaman relasional mahasiswa ditinjau dari kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika. Pendekatan penelitian ini adalah kualitatif deskriptif. Subjek penelitian adalah mahasiswa pendidikan matematika Universitas Negeri Malang. Instrumen penelitian yang digunakan berupa soal tes dan pedoman wawancara. Hasil penelitian menyimpulkan bahwa mahasiswa sudah memiliki pemahaman relasional dengan baik, hal ini dibuktikan dengan jawaban dalam mengerjakan soal induksi matematika. Subjek mampu melakukan prosedur secara keseluruhan dengan baik pada langkah basis maupun langkah induksi dan memperoleh jawaban yang tepat. Namun dalam mengerjakan soal tes subjek masih mengalami kesulitan pada langkah induksi, terutama dalam membuktikan asumsi $n = k + 1$ benar. Hal ini dikonfirmasi subjek melalui wawancara, bahwa subjek mengalami kesulitan pada langkah induksi. Selain itu subjek juga mengatakan bahwa ada beberapa faktor yang menyebabkan terjadi kesulitan dalam mengerjakan soal induksi diantaranya kurangnya pemahaman akan soal dan penguasaan materi prasyarat seperti induksi lemah, deret aritmetika, aljabar, pecahan maupun bentuk pangkat. Namun demikian secara keseluruhan pemahaman relasional subjek baik, karena dapat menjelaskan prosedur beserta alasan menggunakannya dalam menyelesaikan soal induksi matematika.

Kata kunci: Induksi matematika, kesulitan, pemahaman relasional

Copyright (c) 2023 Umi Dristian, Abd Qodar, I Mode Sulandra, Lathiful Anwar

✉ Corresponding author: Umi Dristian

Email Address: umidristian21@gmail.com (Jl. Keben 2 Timur No 16, Malang)

Received 17 April 2023, Accepted 01 May 2023, Published 05 May 2023

DoI: <https://doi.org/10.31004/cendekia.v7i2.2416>

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang tersusun secara deduktif aksiomatik yang artinya bahwa matematika diawali dengan istilah yang belum didefinisikan (Utomo & Huda, 2020).

Temuan istilah seperti sifat dan prinsip dalam matematika tidak semuanya diperoleh melalui pemikiran deduktif melainkan juga melalui proses pemikiran induktif yang berdasarkan pada pengalaman yang dimiliki, namun untuk proses pembuktian kebenaran tetap menggunakan pemikiran deduktif (Suratno, 2020). Sebagai sebuah ilmu yang terstruktur matematika disusun dari pernyataan dasar yang disebut aksioma atau postulat dan disusun kembali menjadi sebuah teorema akan dibuktikan dengan proses pemikiran deduktif sehingga dapat diterima dan berlaku secara umum (Akmaliyah, 2021). Salah satu materi berdiri sebagai sebuah aksioma adalah induksi matematika yang merupakan sebuah metode pembuktian matematis yang diperkenalkan kepada siswa pada jenjang sekolah menengah atas dan mahasiswa (Firmasari & Sulaiman, 2019). Induksi matematika merupakan materi yang bergubungan dengan sifat-sifat dasar pada bilangan asli. Mahasiswa seringkali mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika.

Kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika merupakan suatu kesukaran matematika yang meliputi banyak hal salah satunya kemampuan kognitif mahasiswa. Menurut Hassan, (2016) penyebab kesulitan matematika adalah kesalahan hitung, prosedur pengerjaan yang keliru dan pemahaman yang kurang. Kesulitan yang dialami mahasiswa tersebut harus segera diatasi, hal ini dikarenakan materi induksi matematika adalah salah materi yang menggunakan pembuktian dasar yang harus dipahami sejak awal, karena prinsip pembuktian ini akan digunakan pada mata kuliah selanjutnya (Hassan, 2016). Oleh sebab itu mahasiswa perlu membekali diri dengan kemampuan memahami materi yang lebih baik. Mengetahui kesulitan yang dialami mahasiswa dalam menyelesaikan soal induksi matematika merupakan salah satu upaya untuk dapat melihat proses pemahaman relasional mahasiswa (Pitriani & Afriansyah, 2017). Skemp (1978) mengartikan pemahaman relasional adalah pemahaman akan prosedur yang digunakan beserta alasan menggunakan prosedur. Pemahaman relasional sangat diperlukan saat menggunakan pembuktian dengan induksi matematika. Hal ini sejalan dengan yang dikemukakan (Utomo & Huda, 2020) bahwa pemahaman relasional yang terjadi proses pembuktian dengan induksi matematika merupakan pemahaman akan prosedur yang digunakan serta alasan menggunakan prosedur tersebut.

Pemahaman relasional yang dimiliki mahasiswa dapat membantu untuk mengaitkan antara konsep akan temukan dengan konsep yang telah diketahui sebelumnya, kemudian mahasiswa dapat menjelaskan karakteristik kedua konsep tersebut (Agustini & Endah, 2022). Mengingat pentingnya pemahaman relasional bagi mahasiswa, maka diharapkan mahasiswa terus belajar untuk mengembangkan pemahaman relasional agar dapat mengerti materi yang diajarkan (Utomo & Huda, 2020). Pemahaman relasional memiliki beberapa indikator yang dijadikan sebagai tolak ukur dan penilaian untuk mendeskripsikan bagaimana pemahaman relasional yang dimiliki oleh mahasiswa.

Menurut Douglas & Davis, (2015) terdapat dua kategori pemahaman relasional mahasiswa yaitu kategori prosedural dan konsepstual. Setiap kategori terdapat beberapa indikator yang menjadi tolak ukur untuk mendeskripsikan pemahaman relasional mahasiswa. Kedua kategori yang tersebut akan digunakan pada penelitian ini, kategori prosedural yang digunakan terdiri dari dua indikator

yaitu: (1) kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan dan (2) kelancaran dalam melakukan prosedur. Sedangkan kategori konseptual yang digunakan terdiri dari dua indikator yaitu: (1) memperoleh hasil yang tepat dan (2) memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur.

Penelitian mengenai pemahaman relasional pernah dilakukan oleh Haryandi & Reni, (2022) menyimpulkan bahwa siswa dengan pemahaman relasional yang baik bisa menyelesaikan masalah menggunakan konsep yang tepat dan mengetahui alasan menggunakan konsep serta bisa menjelaskan setiap langkah-langkah yang digunakan pada penyelesaian masalah. Penelitian dengan topik yang berkaitan juga dilakukan oleh Taufik, (2016) menyimpulkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan yang dialami mahasiswa dengan pembuktian induksi matematika terjadi pada saat memanipulasi bentuk aljabar untuk membuktikan kebenaran dari hipotesis induksi, kesulitan yang dialami tepatnya pada langkah induksi. Proses pembuktian diawali dengan menuliskan informasi penting terdapat pada soal, kemudian membuat asumsi dan pernyataan yang akan dibuktikan. Setelah itu mahasiswa yang membuktikan kebenaran dari hipotesis induksi yang dibuat yaitu $P(k + 1)$, dengan mengansumsikan $P(k)$ benar.

Berdasarkan hasil penelitian terdahulu dapat disimpulkan bahwa pentingnya memiliki pemahaman relasional dalam belajar matematika baik bagi siswa maupun mahasiswa. Dalam pembelajaran matematika tidak hanya dituntut mengetahui sebuah konsep tetapi juga harus mengetahui alasan menggunakan konsep dan dapat menjelaskannya dengan tepat. Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, rumusan masalah penelitian ini yaitu bagaimana proses pemahaman relasional mahasiswa ditinjau dari kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika dan tujuan penelitian untuk menganalisis dan mendeskripsikan pemahaman relasional mahasiswa ditinjau dari kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif. Penelitian ini lebih memfokuskan pada proses menyelesaikan soal dengan melihat sifat realita serta hubungan timbal balik peneliti dengan subjek, (Drew, dkk., 2017). Adapun langkah-langkah dalam mengumpulkan data terdiri dari dua tahapan yaitu: (1) tahap perencanaan, merupakan tahap peneliti mempersiapkan segala sesuatu yang berkaitan dengan penelitian seperti menentukan lokasi penelitian, menghubungi dosen pendidikan matematika yang mengampu mata kuliah matematika diskrit dan menentukan jadwal penelitian dan (2) tahap pelaksanaan tindakan, dilaksanakan sesuai dengan tempat dan jadwal penelitian yang telah ditentukan, pada tahap ini peneliti melaksanakan penelitian di kelas dengan mengajarkan materi induksi matematika, kemudian peneliti membuat soal tes yang akan diberikan kepada subjek penelitian untuk dikerjakan, kemudian jawaban siswa dianalisis terlebih dahulu dan dideskripsikan kemudian dilakukan wawancara dengan subjek penelitian.

Tempat pengambilan data dilakukan di Universitas Negeri Malang dengan subjek penelitian dua orang mahasiswa program studi pendidikan matematika semester tiga. Pemilihan subjek menggunakan teknik *non-random purposive sampling* yang berdasarkan pada ketentuan bahwa setiap subjek harus memenuhi kriteria berikut: (1) Subjek bersedia mengikuti penelitian dan (2) subjek bersedia memberikan pendapat terkait hal-hal yang ditanyakan penelitian. Pertimbangan dalam pemilihan kedua subjek juga berdasarkan aktivitas subjek pada proses perkuliahan berlangsung. Subjek S1 diambil dari kategori mahasiswa yang aktif dan mampu merepresentasikan pengetahuan yang dimiliki kepada mahasiswa lain. Sedangkan subjek S2 diambil dari kategori mahasiswa yang kurang aktif dalam proses perkuliahan di kelas. Dari kedua subjek, peneliti ingin mengetahui bagaimana proses pemahaman rasional yang dialami serta kesulitan subjek dalam menyelesaikan soal-soal induksi matematika.

Tahap analisis pada penelitian ini terdiri dari reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan. Pada tahap reduksi data peneliti memilih dua jawaban subjek yang akan dianalisis. Kemudian dilakukan wawancara kepada kedua subjek untuk mengkonfirmasi preoses pemahaman yang dialami dan kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi berdasarkan langkah basis dan langkah induksi. Jawaban kedua subjek ditampilkan dalam bentuk gambar dan dideskripsikan berdasarkan indikator pemahaman relasional yang ditinjau dari kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika. Setiap pekerjaan subjek disertai dengan cuplikan wawancara. Tahap penarikan kesimpulan dilakukan peneliti untuk menginterpretasi setiap jawaban subjek dan cuplikan wawancara berdasarkan mengenai kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika.

HASIL DAN DISKUSI

Berdasarkan jawaban subjek menyelesaikan soal induksi matematika yang diamati pada setiap indikator pemahaman relasional diperoleh informasi bahwa kedua subjek yang dipilih memiliki pemahaman relasional yang baik. Namun masih ada beberapa prosedur penyelesaian yang kurang lengkap. Subjek mengalami beberapa kesulitan menyelesaikan soal, hal ini diketahui berdasarkan jawaban dan didukung dengan hasil wawancara. Jawaban kedua subjek kemudian ditampilkan dan didekripsikan berdasarkan tahapan penyelesaian. Berikut jawaban S1 dalam menyelesaikan soal nomor satu seperti pada Gambar 1.

Berdasarkan jawaban yang ditulis S1 pada indikator kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan dan memperoleh hasil yang tepat. Disimpulkan pada soal nomor 1, S1 dapat melakukan prosedur induksi matematika dengan tepat. Pembuktian pada soal nomor 1 terdapat dua langkah yang digunakan yaitu langkah basis dan langkah induksi. Pada langkah basis subjek S1 mampu membuktikan bahwa $n = 1$ berlaku untuk $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, dan pada langkah induksi S1 mengansumsikan benar untuk $n = k$. Kemudian S1 bisa membuktikan bahwa $n = k + 1$ benar dengan menggunakan asumsi $n = k$, sehingga terbukti $n^3 + 2n$ dapat dibagi 3 untuk semua $n \in N$. Kemudian setelah membuktikan soal nomor 1 benar, S1 melanjutkan pembuktian ke soal nomor 2

dan diperoleh jawaban seperti pada Gambar 2.

1) Prove that $n^2 + 2n$ divisible of 3 for all $n \in \mathbb{N}$

→ LANGKAH BASIS
 $S(n), n_0 \in \mathbb{N}$
 Buktilan $S(1)$ benar
 $S(1) = 1^2 + 2(1) = 3$ (benar, karena dapat dibagi 3)
 Asumsikan n , untuk $n = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$ benar
 $S(2) = 2^2 + 2(2) = 12$ (benar, karena dapat dibagi 3)
 $S(3) = 3^2 + 2(3) = 33$ (benar, karena dapat dibagi 3)
 Karena $S(1), S(2), S(3)$ benar, maka $n-1$ dan n juga benar.

→ LANGKAH INDUKSI
 Anggap benar $S(1), S(2), S(3), \dots, S(k-2), S(k-1), S(k)$, dengan $k \in \mathbb{Z}^+$
 Asumsikan $n = k$ benar
 $S(k) = k^2 + 2(k)$
 Akan ditunjukkan $n = k+1$ benar, sehingga $S(k)$ benar.
 $S(k+1) = (k+1)^2 + 2(k+1)$
 $= (k+1)(k+1) + 2k + 2$
 $= (k^2 + 2k + 1) + 2k + 2$
 $= k^2 + k^2 + 2k^2 + 2k + k + 1 + 2k + 2$
 $= k^3 + 3k^2 + 5k + 3$
 $= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3$
 $= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$
 ↓
 dapat dibagi 3 sesuai asumsi $n=k$ shg $S(k)$ benar.
 ∴ Terbukti bahwa $n^2 + 2n$ dapat dibagi 3 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Annotations:
 - Box 1: S1 dapat membuktikan langkah basis benar dengan $S(1)$ dapat dibagi 3
 - Box 2: S1 mengansumsikan $S(n)$ benar dan membuktikan $S(n+1)$ dapat dibagi 3

Gambar 1 Jawaban Soal Nomor 1 oleh S1

2) Prove $n(n+1)(2n+1)$ for $n \geq 1$ are integer

→ LANGKAH BASIS
 $S(n), n_0 = 1$
 Buktilan $S(1)$ benar
 $S(1) = 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow$ integer (benar)
 Asumsikan untuk $n, n = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$ benar
 $S(2) = 2(2+1)(2 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \rightarrow$ integer (benar)
 $S(3) = 3(3+1)(2 \cdot 3 + 1) = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 14 \rightarrow$ integer (benar)
 Karena $S(1), S(2), S(3)$ benar, maka $n-1$ dan n juga benar.

→ LANGKAH INDUKSI
 Anggap benar $S(1), S(2), S(3), \dots, S(k-2), S(k-1), S(k)$ untuk semua $k \in \mathbb{Z}^+$
 Asumsikan $n = k$ benar
 $S(k) = k(k+1)(2k+1)$
 Akan ditunjukkan $n = k+1$ benar, sehingga $S(k)$ benar.
 $S(k+1) = (k+1)(k+1)(2(k+1)+1)$
 $= (k+1)(k+1)(2k+3)$
 $= (k^2 + 2k + 1)(2k+3)$
 $= (k^2 + 2k + 1)(2k + 3)$
 $= 2k^3 + 3k^2 + 6k^2 + 6k + 4k + 6$
 $= 2k^3 + 9k^2 + 10k + 6$
 $= (2k^3 + 3k^2 + k) + (6k^2 + 10k + 6)$
 $= k(k+1)(2k+1) + 6(k^2 + 2k + 1)$
 $= k(k+1)(2k+1) + k^2 + 2k + 1$
 sesuai asumsi $n=k$ sehingga $S(k)$ benar termasuk elemen \mathbb{Z}^+
 ∴ Terbukti bahwa $n(n+1)(2n+1)$ untuk $n \geq 1$ adalah bilangan bulat.

Annotations:
 - Box 3: S1 dapat membuktikan langkah basis benar untuk $S(1)$ habis dibagi 6
 - Box 4: S1 mengansumsikan $S(n)$ benar dan membuktikan $S(n+1)$ habis dibagi 6

Gambar 2 Jawaban Soal Nomor 2 oleh S1

Berdasarkan jawaban di atas membuktikan bahwa pada indikator kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan dan memperoleh hasil yang tepat dapat dilakukan dengan baik oleh S1. S1 melakukan prosedur induksi matematika dengan tepat dalam mengerjakan soal nomor 2. Pembuktian soal nomor 2, S1 menggunakan dua langkah yaitu langkah basis dan langkah induksi. Pada langkah basis S1 membuktikan bahwa bilangan bulat positif $n \geq 1$ bernilai benar jika disubstitusikan pada $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Prosedur yang digunakan S1 dalam menjawab soal yaitu dengan mengansumsikan $S(1), S(2), S(3)$ benar untuk langkah basis. Sehingga diperoleh hasil 1 untuk $S(1)$, 5 untuk $S(2)$ dan 14 untuk $S(3)$. Dari hasil yang diperoleh kemudian S1 menuliskan dalam bentuk $u_1,$

u_2 dan u_3 . Sehingga memperoleh nilai $S(1) = u_1, S(2) = u_1 + u_2$ sehingga diperoleh $5 = 1 + u_2$, dari persamaan tersebut ditemukan $u_2 = 4 = 2^2$. Dengan cara yang sama subjek S1 juga menemukan $u_3 = 9 = 3^2$.

Langkah induksi memerlukan proses berpikir dan pemahaman yang lebih baik untuk menemukan ide-ide yang kemudian disusun untuk menemukan pembuktian yang benar untuk $n = k + 1$ (Taufik, 2016). Pada langkah induksi subjek S1 mengawali dengan membuat asumsi $n = k$ benar, sehingga diperoleh persamaan yang dituliskan dalam bentuk $1 + 4 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Pada langkah basis belum terlalu mengalami kesulitan karena pada langkah ini subjek hanya mensubstitusikan $n = 1$ benar untuk persamaan yang ada pada soal. Setelah itu S1 melanjutkan pada tahap berikutnya yaitu mengansumsikan benar untuk $n = k + 1$, dan diperoleh persamaan $1 + 4 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$. Dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa bilangan bulat positif $n \geq 1$ bernilai benar jika disubstitusikan pada $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Jawaban yang ditemukan oleh S1 sudah tepat, namun dalam proses menemukan jawaban tersebut S1 mengalami beberapa kesulitan diantaranya kesulitan dalam memanipulasi bentuk aljabar dan melakukan perhitungan, hal ini diungkapkan S1 dalam wawancara yang dilakukan. Berdasarkan jawaban S1 membuktikan bahwa subjek mampu melakukan prosedur secara keseluruhan baik pada langkah basis dan langkah induksi sehingga memperoleh hasil yang tepat. Kemudian peneliti melakukan wawancara dengan S1 untuk mengetahui pemahaman pada indikator kelancaran dalam melakukan prosedur serta kesulitan dalam menyelesaikan soal, berikut hasil wawancara dengan S1.

- P* : Apakah ada kesulitan yang kamu alami saat mengerjakan soal nomor 1 dan nomor 2?
- S1* : Iya bu ada, yaitu pada langkah induksi, sering kali saya kesulitan dalam membuktikan kebenaran dari ruas kiri dan kanan.
- P* : Apakah tingkat kesulitan pada nomor 1 dan 2 sama atau berbeda?
- S1* : Berbeda bu, menurut saya yang lebih sulit adalah soal nomor 2 karena bentuknya pecahan dan saya bingung saat memanipulasi bentuk aljabar pada langkah induksi. Sedangkan pada soal nomor 1 saya tidak terlalu mengalami kesulitan.

Berdasarkan hasil wawancara dapat disimpulkan bahwa S1 mengalami kesulitan pada soal nomor 1 dan nomor 2, S1 mengatakan kesulitan terjadi pada langkah induksi. S1 mengalami kesulitan saat membuktikan ruas kiri dan ruas kanan bernilai sama. Selain itu S1 juga mengalami kesulitan saat memanipulasi bentuk aljabar pada langkah induksi. S1 mengatakan bahwa soal nomor 1 dan 2 memiliki tingkat kesulitan yang berbeda. Soal nomor 2 dianggap lebih sulit dari pada nomor 1. Kesulitan yang dialami mahasiswa saat menyelesaikan soal induksi matematika seringkali terdapat pada pemahaman konsep dan prosedur pada langkah induksi (Ardiawan, 2016). Dan juga bisa

benar untuk $S(k + 1)$ dan diperoleh hasil $(k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$ terbukti benar. Karena diasumsikan benar untuk $(k^3 + 2k)$, maka $3(k^2 + k + 1)$ juga benar dan habis dibagi 3 sehingga $n^3 + 2n$ terbukti benar habis dibagi 3. Selain itu jawaban S2 mengerjakan soal nomor 2 juga membuktikan bahwa subjek menguasai indikator kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan dan memperoleh hasil yang tepat dapat. Jawaban S2 soal nomor 2 yang dituliskan oleh S2 dapat dilihat pada Gambar 4.

Pada langkah induksi S2 mengansumsikan $S(n)$ benar dan membuktikan $S(n + 1)$ habis dibagi 6

2. Buktikan $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ untuk $n \geq 1$ adalah integer

• Langkah basis

$n_0 = 1$

$S(1) = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \in \mathbb{Z}$ benar

$S(2) = \frac{2(2+1)(2 \cdot 2 + 1)}{6} = \frac{30}{6} = 5 \in \mathbb{Z}$ benar

• Langkah induksi

asumsikan $n = k$ benar + asumsikan $S(1), S(2), S(3), \dots, S(k-2), S(k-1), S(k)$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ benar untuk $n \geq 2$

$S(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$

$= \frac{k(k+1)[(2k+1)+2] + 2(k+1)[(2k+1)+2]}{6}$

$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{(2k^2+2k) + (2k+2)(2k+3)}{6}$

$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{2k^2+2k+4k^2+10k+6}{6}$

$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k^2+2k+1)}{6}$

$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k^2+2k+1) \in \mathbb{Z}$ benar

S1 dapat membuktikan langkah basis benar untuk $S(1)$ habis dibagi 6

Gambar 4 Jawaban Soal Nomor 2 oleh S2

Berdasarkan jawaban S2 mengerjakan soal nomor dua diperoleh informasi bahwa S2 melakukan prosedur pengerjaan yang tepat. Ada dua langkah yang digunakan S2 dalam mengerjakan soal nomor 2 yaitu langkah basis dan langkah induksi. Pada langkah basis subjek mengansumsikan benar untuk $n = 1$ sehingga $S(1), S(2)$ disubstitusikan ke $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, memperoleh $S(1) = 1, S(2) = 5$. Karena S merupakan simbol dari deret sehingga S2 memisalkan u_1 sebagai suku ke-1 dan u_2 suku ke-2. Dengan mensubstitusikan $S(2) = 5$ dan $u_1 = 1$, dengan demikian diperoleh $S(2) = u_1 + u_2$. Kemudian $u_1 = 1$ disubstitusikan sehingga didapat $u_2 = 4$. Pada langkah induksi S2 mengansumsikan $n = k$ benar dan diperoleh $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ juga bernilai benar. Kemudian S2 membuktikan $n = k + 1$ dan diperoleh $\frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+1)}{6}$ benar. Dengan demikian disimpulkan bahwa $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ untuk $n \geq 1$ adalah bilangan bulat terbukti benar.

Berdasarkan jawaban S2 pada soal nomor 1 dan nomor 2 membuktikan bahwa S2 mampu melakukan prosedur secara keseluruhan baik pada prosedur basis dan prosedur induksi, sehingga memperoleh hasil yang tepat. Sedangkan untuk mengetahui apakah subjek mengalami kelancaran dalam melakukan prosedur saat mengerjakan soal nomor 1 dan nomor 2, maka dilakukan wawancara dengan S2.

- P : Apakah dalam menyelesaikan soal nomor 1 dan 2 kamu mengalami kesulitan?
- S2 : Iya bu, saya mengalami
- P : Pada langkah apakah kamu mengalami kesulitan?

- S2 : Saya mengalami kesulitan pada langkah induksi, terkadang bingung ketika memanipulasi bentuk aljabar dari pernyataan agar bernilai benar.
- P : Apakah tingkat kesulitan pada no 1 dan 2 sama atau berbeda?
- S2 : Iya ka, yang lebih sulit itu no 2, karena pada pembuktian $n = k + 1$, terkadang saya bingung cara membuktikan ruas kiri atau kanan bias sama dan juga bentuk soalnya pecahan jadi saya jadi membuat saya kesulitan untuk membuktikannya. Sedangkan nomor 1 saya hampir tidak mengalami kesulitan.

Berdasarkan jawaban subjek S2 pada soal nomor 1 dan soal nomor 2 terbukti bahwa kemampuan dalam melakukan pembuktian matematis secara keseluruhan dapat dilakukan dengan baik. Seperti pada langkah basis maupun induksi. Selain itu juga S1 bisa menjelaskan jawaban yang ditulis. Hal ini menunjukkan bahwa S2 memiliki pemahaman relasional baik. Selain itu kesulitan yang dialami subjek S2 dalam mengerjakan soal nomor 1 dan dua tidak terlalu banyak, sehingga S2 dapat menemukan jawaban yang tepat. Berdasarkan jawaban S1 dan S2 menyimpulkan bahwa subjek memahami maksud soal dengan benar dan dapat melakukan perhitungan dengan tepat serta bisa menjelaskan alasan menggunakan konsep atau prosedur dalam perhitungan. Dengan demikian pemahaman yang dimiliki S1 dan S2 disebut sebagai pemahaman relasional (Sidik, 2016). Pemahaman relasional dapat mengembangkan kemampuan dalam matematika seperti kemampuan pemahaman konsep matematika dengan benar, kemampuan menggunakan prinsip atau konsep matematika, kemampuan melihat masalah secara keseluruhan dan kemampuan induktif mahasiswa (Abdullah & Fita, 2021).

Namun demikian dalam mengerjakan soal induksi matematika subjek juga harus menguasai materi dasar tentang induksi matematika. Materi dasar yang harus dikuasai merupakan materi prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur saat menyelesaikan soal induksi. Hal ini diungkapkan subjek pada saat wawancara dengan peneliti.

- P : Apakah dibutuhkan pengetahuan mengenai materi prasyarat dalam menyelesaikan soal induksi?
- S2 : Iya bu, membutuhkan
- P : Jelaskan pengetahuan prasyarat apa yang perlu miliki untuk menyelesaikan soal no 1 dan 2?
- S2 : Pengetahuan prasyarat yang harus dikuasai yaitu materi deret aritmetika, bentuk aljabar, operasi perpangkatan, materi pecahan. prosedur induksi dan pengetahuan tentang induksi lemah.

Dari hasil wawancara dengan S2, dalam menyelesaikan soal induksi matematika pada nomor 1 dan nomor 2, subjek membutuhkan pemahaman mengenai materi prasyarat. S2 menjelaskan bahwa materi prasyarat yang perlu dikuasai yaitu materi deret aritmetika, operasi perpangkatan, materi pecahan dan pengetahuan tentang materi induksi lemah. Hal ini dibutuhkan karena seringkali subjek

mangalami kesulitan saat membuktikan kebenaran pada langkah induksi. Kesulitan yang sering dialami subjek yaitu memanipulasi aljabar, menghitung nilai dari suatu operasi dan kesulitan dalam memindahkan konstanta maupun variabel dari satu langkah ke langkah berikutnya (Ilhamuddin & Ernawati, 2020). Subjek mengalami kesulitan karena kurang memahami prsyarat dengan baik sehingga diperlukan pemahaman yang lebih mengenai materi prasyarat dalam mempelajari materi induksi matematika (Albania, dkk., 2022). Namun demikian subjek bisa menjelaskan bagaimana langkah dalam menyelesaikan soal induksi dan bahkan bisa memberikan penjelasan mengenai kesulitan yang dihadapi dalam menjawab soal, hal ini yang disebut sebagai pemahaman relasional. Subjek perlu meningkatkan pemahaman relasional agar bisa lebih memahami maksud soal dan bisa menemukan jawaban yang tepat.

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan mengenai analisis proses pemahaman relasional mahasiswa ditinjau dari kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi matematika. Kesulitan yang dihadapi siswa pada setiap indikator pemahaman relasional dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Kesulitan Siswa pada Indikator Pemahaman Relasional

Indikator	Kesulitan yang dihadapi
Kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan	Subjek kesulitan dalam menggunakan konsep matematika lainnya, yaitu konsep perpangkatan dan konsep pecahan
Kelancaran dalam melakukan prosedur	Subjek kesulitan untuk memanipulasi aljabar, melakukan perhitungan, dan memindahkan konstanta serta variabel dari langkah satu ke langkah berikutnya.
Memperoleh hasil yang tepat	Subjek sering lupa menuliskan kesimpulan dari setiap langkah dan subjek kesulitan dalam membuktikan kebenaran pada langkah induksi
Pengetahuan mengenai materi prasyarat	Subjek kesulitan dalam mengingat kembali materi prasyarat seperti materi deret aritmetika, bentuk aljabar, operasi perpangkatan, materi pecahan. prosedur induksi dan pengetahuan tentang induksi lemah.

Dalam upaya meningkatkan pemahaman relasional dan mengatasi kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi, mahasiswa harus lebih sering berlatih mengerjakan soal-soal induksi matematika. Agar pemahaman relasional mahasiswa dapat terus berkembang. Mengingat pemahaman relasional merupakan pemahaman yang menuntut mahasiswa agar dapat menjelaskan alasan menggunakan konsep matematika. Selain itu pemahaman relasional berkaitan dengan kemampuan dalam pembuktian seperti induksi matematika, karena merupakan dasar untuk beberapa mata kuliah bidang matematika (Sulaiman & Siska, 2016).

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di telah dijelaskan dapat disimpulkan bahwa subjek penelitian sudah memiliki pemahaman relasioanal dengan baik. Hal ini terbukti terbukti dari jawaban S1 dan S2 yang sudah bisa menggunakan pembuktian dengan induksi matematika dengan baik dan

sudah mampu membuktikan sebuah asumsi bernilai benar baik pada langkah basis maupun langkah induksi. Namun pada pada langkah induksi S1 maupun S2 mengalami beberapa kesulitan. Kesulitan yang dialami S1 dan S2 terjadi saat membuktikan suatu asumsi $n = k + 1$ bernilai benar ketika disubstitusikan ke soal nomor 1 maupun soal nomor 2. Selin itu kesulitan juga terjadi saat memanipulasi bentuk aljabar untuk menyamakan ruas kiri dan ruas kanan. Namun secara keseluruhan pada indikator kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan dan memperoleh hasil yang tepat dapat dilakukan dengan baik oleh S1 dan S2.

Sedangkan untuk indikator kelancaran melakukan prosedur dan indikator memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur subjek juga mengalami beberapa kesulitan. Hal ini berdasarkan hasil wawancara yang dilakukan peneliti dengan S1 dan S2. Dari hasil wawancara menyimpulkan bahwa S1 dan S2 mengalami beberapa kesulitan dalam pembuktian pada langkah induksi. S1 maupun S2 mengatakan bahwa soal nomor 1 dan nomor 2 memiliki tingkat kesulitan yang berbeda. Soal nomor dua dianggap sulit oleh subjek S1 maupun subjek S2 karena pada soal nomor 2 menggunakan bentuk pecahan sehingga menyulitkan pada saat pembuktian dilangkah induksi. Saat mengerjakan soal nomor 1, subjek hampir tidak mengalami kesulitan pada langkah basis maupun langkah induksi.

Subjek S1 dan subjek S2 juga mengatakan bahwa mereka harus memiliki pengetahuan yang lain sebagi pengetahuan prasyarat dalam menyelesaikan soal induksi. Karena pada soal nomor 1 dan 2 merupakan materi induksi kuat, sehingga mereka perlu mempelajari menguasai materi prasyarat seperti induksi lemah, deret aritmetika, bentuk pecahan dan operasi aljabar agar memudahkan untuk menjawab soal. Oleh sebab itu dalam mempelajari materi mengenai induksi mahasiswa tidak hanya berfokus pada satu materi melainkan harus bisa menghubungkan dan mencari relasi antara materi-materi yang lainnya.

Harapan peneliti bagi peneliti berikutnya agar dapat menemukan solusi untuk mengatasi kesulitan yang dihadapi siswa maupun mahasiswa dalam mempelajari materi induksi. Peneliti juga mengharapkan agar penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca sebagai referensi maupun perbandingan untuk penelitian selanjutnya. Tentunya penelitian yang berkaitan dengan topik pemahaman relasional mahasiswa dalam menyelesaikan soal induksi matematika. Sehingga dapat menciptakan inovasi-inovasi yang menarik dalam dalam mengatasi kesulitan belajar terutama belajar matematika. Dengan demikian akan tercipta ilmuan-ilmuan yang berkualitas dan berintegritas dengan tetap memperhatikan kaidah dalam melakukan suatu penelitian.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Abd Qohar, selaku penulis kedua, I Made Sulandra, selaku penulis ketiga dan Lathiful Anwar selaku penulis keempat yang dengan setia bekerjasama dan mendampingi proses penulisan jurnal ini sehingga dapat diselesaikan dengan tepat waktu.

REFERENSI

- Abdullah, A. A., & Fita, N. (2021). Effectiveness of Contextual Teaching and Learning on The Ability to Mathematical Relational Understanding in Junior High School. *Jurnal Mathematics Education Learning And Teaching*, 10 (2), 198–205.
- Agustini, A., & Endah, B. R. (2022). Profil Berpikir Relasional Siswa Sma Dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau Dari Gaya Belajar Auditor. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 11(3), 794–811.
- Akmaliyah, M. (2021). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Melalui Pendekatan Deduktif Pada Mata Kuliah Geometri. *Jurnal Pendidikan Guru Matematika*, 53(9), 1689–1699.
- Albania, I., Reka, I. K., & Rizky, R. (2022). Analisis Kesulitan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Induksi Matematika. *Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, 11(4), 3777-3789.
- Ardiawan, Y. (2015). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal induksi matematika di IKIP PGRI Pontianak. *Jurnal Pendidikan Informatika dan Sains*, 4(1), 147-163
- Atiqoh, K. S. N., & M, H. (2021). Miskonsepsi Mahasiswa pada Induksi Matematika Menggunakan Certainty of Response Index (CRI). *Jurnal Padagogik*, 4(2), 43–51.
- Douglas, A., & Davis, M. R. (2015). Understanding student satisfaction and dissatisfaction: An interpretive study in the UK Higher Education Context. *Studies in Higher Education*, 40 (2), 329-349.
- Drew, Clifford, Michael, Hardman, & John, Hosp, (2017). Penelitian Pendidikan Merancang dan Melaksanakan Penelitian pada Bidang Pendidikan. Jakarta : PT. Indeks.
- Firmasari, S., & Sulaiman, H. (2019). Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Induksi Matematika. *Journal of Medives : Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, 3(1), 1–9.
- Haryadi, R., & Reni, A. (2022). Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Pemahaman Matematis pada Mata Kuliah Teori Peluang. *Jurnal Pendidikan dan Matematika*, 11(2), 218-227.
- Hafiz, M., & Khamida, S. N. A. (2021). Miskonsepsi Mahasiswa pada Induksi Matematika Menggunakan Certainty of Response Index (CRI). *Jurnal Padagogik*, 4(2), 43-51.
- Ilhamuddin., & Ernawati. (2020). Deskripsi Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Matematika Pokok Bahasan Induksi Matematika. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9(2), 80-91.
- Johan, S., & Albi, A. (2018). *Metodologi penelitian kualitatif*. Sukabumi: CV Jejak (Jejak Publisher).
- Kurniawan, A. T. H., & Rudhito, M. A. (2016). Kemampuan Berpikir Relasional Siswa dalam Mengerjakan Soal Kontekstual dengan Pendekatan Realistik Pada Topik Fungsi Linear. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 622-632
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.

- Pitriani, R., & Afriansyah, E. A. (2017). Persepsi dalam Pembelajaran Pendekatan Keterampilan Proses terhadap Kemampuan Koneksi Matematis Siswa. *Jurnal Gantang*, 1(2), 15-24.
- Sidik, G. S. (2016). Analisis Proses Berpikir Dalam Pemahaman Matematis Siswa Sekolah Dasar Dengan Pemberian Scaffolding. *Jurnal Pendidikan Sekolah Dasar*, 2(2), 192–204.
- Skemp, R. R (2006). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. *Journal National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, 12(2), 88-95.
- Sulaiman & Siska. (2019). Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Induksi Matematika. *Journal of Medives*, 3(1).
- Taufik, A. (2016). Diagnosis Kesulitan Mahasiswa di Universitas Kuningan dalam Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika Beserta Upaya Mengatasinya Menggunakan Scaffolding. *Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika*, 2(1), 42-54
- Utomo, D. P., & Huda, M. (2020). Pemahaman Relasional Analisis Proses Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika. *Bildung*, 01(01), 1–65.