E-ISSN: 2579-9258
P-ISSN: 2614-3038

Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika
Volume 07, Nomor 03, Agustus-November 2023, pp. 2703-2714

Struktur Argumentasi Mahasiswa dalam Pembuktian Sifat Ketertutupan Suatu Grup

M. Zainul Arifin[1], Sudirman[2]✉, Rustanto Rahardi[3]

[1, 2,3] Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang
Jl. Semarang No 5, Kota Malang, Indonesia
zainularifin9195@gmail.com

Abstract

This research applied the Toulmin Argumentation Model in identifying the structure of argumentation to prove the closure property of a Group with a deductive approach. The data were obtained from 30 students who took the Introduction to Ring Theory course. From all the participants, one subject was selected for further analysis based on complete and correct answers. The components of Toulmin's model were applied in analyzing the answers of the selected subject. The results of the analysis showed that the subject was able to construct a clear Claim and to present an appropriate Warrant and strong Backing; although some of the components of the argumentation were presented implicitly, they could be revealed using the Toulmin Argumentation Model. The advantage of using the Toulmin Argumentation Model in deductive proof is seen in its ability to formulate structured and clear arguments. This model allows for systematic explanations and strengthens confidence in the validity of the proof. This research is expected to enrich the understanding of the structure of argumentation in deductive proofs of the closure property of a Group, and to show the potential use of the Toulmin Argumentation Model in identifying mathematical argumentations.
Keywords: Argumentation, Closure, Group Theory, Structure, Proving

Abstrak

Penelitian ini menerapkan Model Argumentasi Toulmin dalam mengidentifikasi struktur argumentasi pada pembuktian sifat ketertutupan suatu grup dengan pendekatan deduktif. Data diperoleh dari 30 mahasiswa yang menempuh mata kuliah pengantar teori gelanggang. Dari seluruh partisipan yang berpartisipasi, satu subjek dipilih berdasarkan jawaban lengkap dan benar untuk dianalisis lebih lanjut. Komponen-komponen model Toulmin diterapkan dalam analisis terhadap jawaban subjek yang dipilih. Hasil analisis menunjukkan bahwa subjek mampu merumuskan *Claim* yang jelas, menyajikan *Warrant* yang tepat dan *Backing* yang kuat, walaupun terdapat komponen argumentasi yang tersaji secara implisit, namun dapat diungkap dengan menggunakan Model Argumentasi Toulmin. Kelebihan penggunaan model argumentasi Toulmin dalam pembuktian deduktif terlihat dalam kemampuannya untuk merumuskan argumen yang terstruktur dan jelas. Model ini memungkinkan penjelasan yang sistematis dan memperkuat kepercayaan terhadap validitas pembuktian. Dengan adanya penelitian ini diharapkan memperkaya pemahaman tentang struktur argumentasi dalam pembuktian deduktif terhadap sifat ketertutupan grup dan menunjukkan potensi penggunaan Model Argumentasi Toulmin dalam mengidentifikasi argumentasi matematika.
Kata kunci: Argumentasi, Ketertutupan, Pembuktian, Struktur, Teori Grup

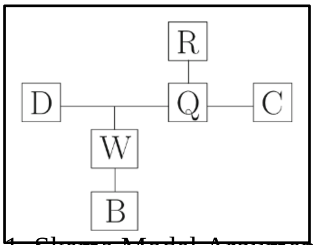
✉ Corresponding author: Sudirman
Email Address: sudirman.fmipa@um.ac.id (Jl. Semarang No 5, Kota Malang, Indonesia)
Received 01 June 2023, Accepted 23 July 2023, Published 18 August 2023
DoI: https://doi.org/10.31004/cendekia.v7i3.2534

PENDAHULUAN

Pembuktian bukanlah hal yang baru bagi mahasiswa matematika di perguruan tinggi. Pembuktian merupakan dasar dari pemahaman matematika dan sangat penting untuk mengembangkan, membangun, dan mengomunikasikan matematika (Nadlifah & Prabawanto, 2017). Pembuktian adalah salah satu karakteristik utama dari matematika sebagai sebuah disiplin ilmu (Rabin & Quarfoot, 2021) dan menjadi dasar dalam kegiatan matematika (Hanna, 2018; Wittmann, 2021). Validitas teorema dalam matematika dapat ditunjukkan dengan adanya pembuktian (Cadwallader Olsker, 2011; Pala dkk., 2021). Lebih lanjut, pembuktian dan penalaran berperan penting untuk menunjukkan kebenaran solusi dari permasalahan matematika dalam pembelajaran matematika (Hamami & Morris, 2020; Wittmann, 2021), sehingga kemampuan mengonstruksi bukti bagi mahasiswa matematika menjadi salah satu hal yang sangat penting (Moore, 2016; Thomas dkk., 2015; Wasserman dkk., 2018). Lee (2016) mendefinisikan konstruksi bukti sebagai proses membangun pernyataan matematika untuk menunjukkan proposisi matematikanya benar atau salah.

Salah satu mata kuliah yang menuntut mahasiswa menggunakan kemampuan pembuktian matematika adalah Aljabar Abstrak (Isnarto dkk., 2014), dan merupakan salah satu mata kuliah yang sangat penting yang ada dalam kurikulum jurusan matematika dan pendidikan matematika di Indonesia maupun di negara lain (Arnawa dkk., 2020). Kemampuan ini menjadi salah satu aspek penting dalam mempelajari Aljabar Abstrak (Findell, 2001). Karena mata kuliah tersebut identik dengan definisi dan teorema membutuhkan pembuktian, maka mahasiswa harus memahami setiap definisi dan teorema untuk mengorganisasikan konsep dalam kegiatan pembuktian (Astuti & Zulhendri, 2017; Pramasdyahsari dkk., 2022).

Toulmin menyatakan untuk mengidentifikasi struktur suatu argumen dapat menggunakan Model Argumentasi Toulmin (Toulmin, 2003). Banegas (2013) menyatakan bahwa skema Toulmin dapat digunakan dalam analisis, penilaian dan konstruksi argumen dan dengan menggunakan skema tersebut dapat diketahui bahwa apakah argumen tersebut didukung oleh suatu data yang valid, jaminan apa saja yang digunakan untuk menyatakan argumen valid, apakah ada penyangkal dari argumen tersebut. Model Argumentasi Toulmin terdiri dari tiga komponen utama: *Data* (D), *Claim* (C) dan *Warrant* (W) dan tiga komponen pelengkap: *Backing* (B), *Rebuttal* (R) dan *Qualifier* (Q). Argumen Toulmin digambarkan dalam skema seperti pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Skema Model Argumentasi Toulmin

Menurut Toulmin (2003), *Data* (D) adalah fondasi argumen. Terdiri dari fakta-fakta yang mendukung Claim. *Claim* (C) adalah pernyataan atau kesimpulan yang dibuat berdasarkan data. *Warrant* (W) adalah jembatan yang menghubungkan data dan Claim dan menjadi dasar pemikiran atau alasan yang digunakan untuk menghasilkan kesimpulan. Sebuah *Warrant* diperkuat oleh *Backing* (B), yang merupakan bukti lebih lanjut atau alasan tambahan yang diperlukan. *Rebuttal* (R) adalah pernyataan yang menyangkal kesimpulan yang dihasilkan jika kondisi tersebut tidak terpenuhi (Toulmin, 2003). Manfaat dalam menganalisis suatu argumen dengan skema Toulmin adalah untuk menangkap makna terbaik atau kekuatan kata-kata dan proposisi dengan melihat bagaimana seseorang mampu menggunakannya dalam berbagai konteks (Bizup, 2009).

Terdapat banyak penelitian terdahulu yang membahas mengenai struktur argumentasi. Penelitian Faizah dkk. (2021) dan Aaidati dkk. (2022) menginvestigasi struktur argumen namun tidak menunjukkan bagaimana skema atau struktur argumentasi yang lengkap hasil pekerjaan siswa. Kemudian penelitian Laamena & Nusantara (2019) mengkaji mengenai struktur argumentasi yang berfokus pada komponen *Backing* dan menampilkan bagaimana struktur argumentasi Toulmin yang lengkap dari jawaban mahasiswa, namun. Namun masih sedikit penelitian yang berfokus pada struktur argumentasi dalam mengonstruksi bukti terutama pada materi Teori Grup pada sifat ketertutupan. Oleh karena itu, perlu adanya penelitian untuk mendeskripsikan struktur argumentasi yang digunakan mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dan menganalisisnya dengan menggunakan Model Argumentasi Toulmin. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan argumentasi mahasiswa dalam pembuktian sifat ketertutupan suatu grup berdasarkan Model Argumentasi Toulmin dengan menganalisis dan memahami komponen-komponen argumentasi yang digunakan oleh mahasiswa. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan wawasan bagi pengajar dalam mengidentifikasi komponen argumentasi yang digunakan oleh mahasiswa. Dengan memahami komponen-komponen tersebut, pengajar dapat lebih efektif dalam membimbing mahasiswa dalam mengonstruksi bukti yang valid. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi pedoman bagi pengajar dalam membimbing mahasiswa dalam mengonstruksi bukti yang valid. Temuan penelitian ini dapat digunakan sebagai sumber ide untuk merekonstruksi argumentasi mahasiswa yang kurang valid, sehingga pengajar dapat memberikan panduan yang lebih spesifik dan membantu mahasiswa memperbaiki kualitas argumentasi mereka.

METODE

Penelitian ini menggunakan desain penelitian deskriptif kualitatif untuk mendeskripsikan struktur argumen mahasiswa dalam mengonstruksi bukti pada materi Teori Grup, terutama pada sifat ketertutupan. Sebanyak 30 mahasiswa semester empat yang sedang menempuh mata kuliah Pengantar Teori Gelanggang pada Departemen Matematika Universitas Negeri Malang menjadi partisipan penelitian. Data diperoleh dari jawaban terhadap soal Tes Pembuktian Matematika yang terdapat pada Gambar 2 dan hasil wawancara terhadap mahasiswa.

Diketahui himpunan G sebagai berikut.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right\}$$

Buktikan bahwa G adalah grup terhadap operasi perkalian!

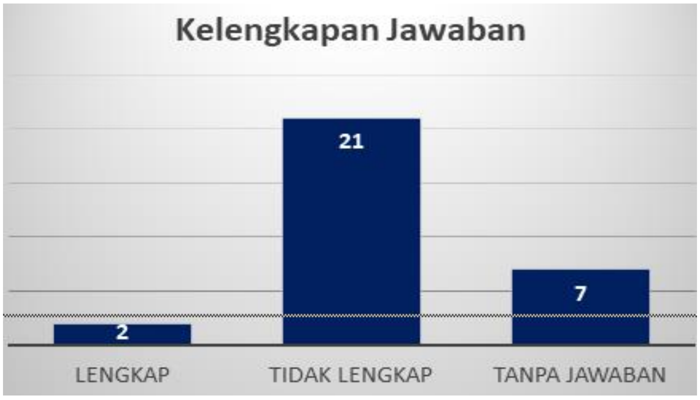
Gambar 2. Soal Tes Pembuktian Matematika

Soal tes terdiri dari 1 soal pembuktian G adalah grup. Untuk membuktikan suatu sistem $(G,\times)$

adalah grup, maka perlu ditunjukkan beberapa sifat yaitu operasinya bersifat tertutup, operasinya bersifat asosiatif, terdapat elemen identitas, dan setiap elemen di G memiliki invers. Berdasarkan sifat tersebut dipilih satu sifat yaitu sifat tertutup yang akan diteliti lebih lanjut mengenai argumentasi yang dikonstruksi oleh mahasiswa. Karena sifat tertutup merupakan sifat yang pertama kali harus dibuktikan ketika akan membuktian suatu grup, sehingga penting bagi mahasiswa untuk dapat membuktikan sifat ketertutupan dengan benar dan dapat melanjutkan ke pembuktian sifat grup selanjutnya. Soal tersebut telah melalui proses validasi oleh 1 orang validator ahli pada bidang matematika. Bukti-bukti dari mahasiswa diterima dalam bentuk tertulis. Berdasarkan hasil pekerjaan mahasiswa, dipilih 1 subjek dengan jawaban yang lengkap dan benar supaya dapat menggambarkan argumentasi yang digunakan dengan lebih mendalam. Kemudian dilakukan wawancara agar dapat menggali informasi lebih lanjut mengenai argumentasi yang digunakan oleh subjek ketika menunjukkan sifat ketertutupan. Data hasil pekerjaan subjek dan transkrip wawancara akan dianalisis struktur argumentasinya berdasarkan Model Argumentasi Toulmin dengan cara mengidentifikasi setiap komponen argumentasi dan keterkaitan antar komponen tersebut.

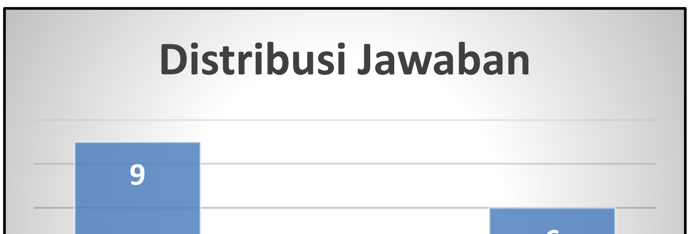
HASIL DAN DISKUSI

Berdasarkan hasil Tes Pembuktian Matematika dari sebanyak 30 mahasiswa, didapatkan sebanyak 2 mahasiswa mampu memberikan jawaban dengan lengkap, 21 mahasiswa memberikan jawaban dengan tidak lengkap dan 7 mahasiswa dengan tanpa jawaban sesuai dengan Gambar 3 di bawah ini.



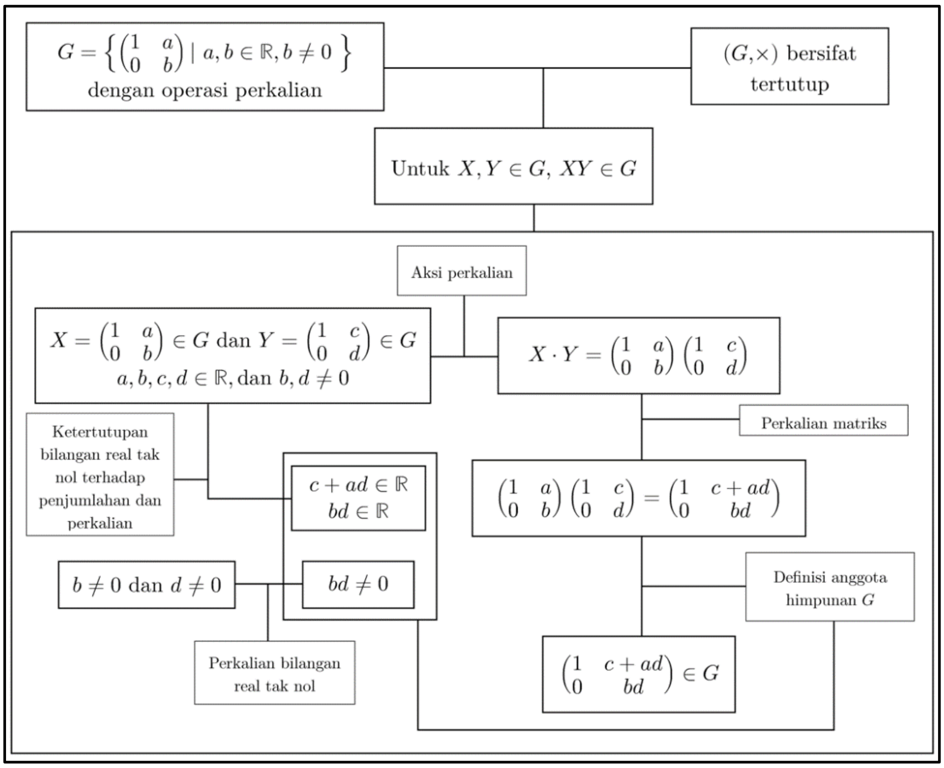
Gambar 3. Distribusi Kelengkapan Jawaban

Berdasarkan grafik distribusi jawaban pada Gambar 4 di bawah ini didapatkan bahwa sebanyak 9 mahasiswa mampu membuktikan sifat ketertutupan namun hanya 3 mahasiswa yang mampu menjawab dengan benar, dimana sifat ketertutupan merupakan sifat yang paling sedikit dijawab dan paling sedikit dijawab dengan benar oleh mahasiswa. Kemudian dari 2 mahasiswa yang mampu memberikan jawaban dengan lengkap dan menjawab benar pada sifat ketertutupan tersebut dipilih 1 mahasiswa sebagai subjek penelitian untuk mengetahui bagaimana struktur argumentasinya lebih mendalam.



Gambar 4. Distribusi Jawaban Benar pada Sifat Ketertutupan

Agar mempermudah mendapatkan informasi mengenai komponen-komponen argumentasi dari bukti yang dikonstruksi oleh mahasiswa pada sifat ketertutupan, maka dibuat suatu skema pembuktian ideal yang menjadi acuan dalam menganalisis hasil pekerjaan mahasiswa. Skema pembuktian yang ideal tersaji pada Gambar 5 di bawah ini

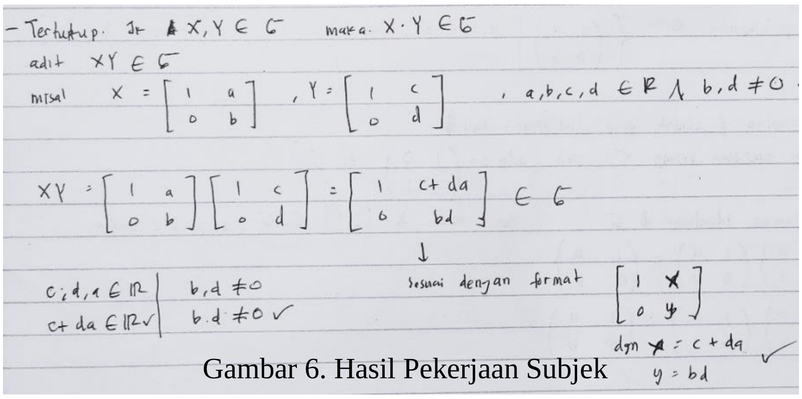


Gambar 5.Struktur pembuktian ideal pada sifat ketertutupan

Berdasarkan skema pembuktian yang ideal pada Gambar 5 di atas, *Data* adalah informasi yang diketahui pada soal, yaitu diketahui bahwa terdapat himpunan G sebagai berikut.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right\} \quad (1)$$

Kemudian diketahui bahwa operasi yang digunakan adalah operasi perkalian (untuk mempermudah penyebutan disebut sebagai $(G,\times)$), dengan *Claim* bahwa operasi perkalian di $(G,\times)$ bersifat tertutup berdasarkan *Warrant* yaitu definisi ketertutupan, untuk $X, Y \in G$ maka $XY \in G$. Ketiga komponen tersebut membentuk struktur terluar dari pembuktian dan siapapun yang ingin menunjukkan ketertutupan akan menggunakan struktur yang sama. Namun yang membedakan adalah pada komponen *Backing*. *Backing* menjelaskan mengapa *Warrant* bernilai benar. Oleh karena itu, pada komponen *Backing* inilah terjadi perbedaan struktur pembuktian sesuai dengan hasil pekerjaan subjek. Gambar 6 di bawah ini merupakan hasil pekerjaan Subjek dalam menunjukkan sifat ketertutupan pada $(G,\times)$.



Gambar 6. Hasil Pekerjaan Subjek

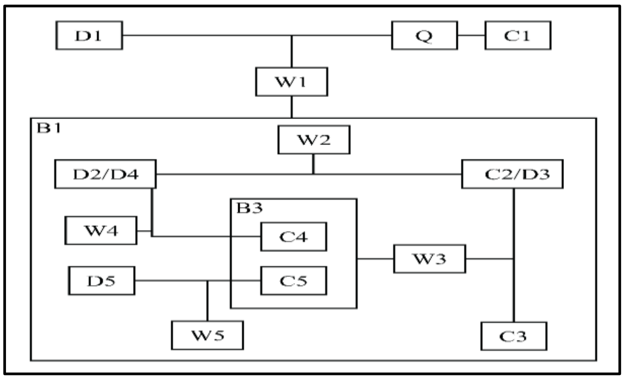
Subjek menggunakan argumentasi yang bersifat deduktif dalam mengonstruksi bukti bahwa operasi di G bersifat tertutup. Langkah pertama yang dilakukan Subjek untuk memulai pembuktian adalah dengan mengambil dua anggota G, yaitu X dan Y dengan $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $b, d \neq 0$. Berdasarkan pernyataan tersebut Subjek sudah mampu memahami informasi yang terdapat pada soal, karena mampu menunjukkan bagaimana anggota himpunan G dan syarat-syarat apa saja yang harus dipenuhi agar menjadi anggota himpunan G. Pernyataan tersebut yang digunakan Subjek sebagai komponen *Data* untuk membuat *Claim* bahwa $XY = \begin{pmatrix} 1 & c + ad \\ 0 & bd \end{pmatrix} \in G$.

Terdapat banyak komponen argumentasi yang dibiarkan secara implisit pada proses tersebut, dimulai ketika Subjek mengambil 2 anggota himpuna G yaitu $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dengan $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ dan $b, d \neq 0$, kemudian dilakukan operasi perkalian matriks sehingga dihasilkan $XY = \begin{pmatrix} 1 & c + ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}$. Namun komponen argumentasi yang implisit tersebut masih masuk pada struktur pembuktian karena berkaitan mengenai pemahaman Subjek terhadap operasi perkalian matriks pada umumnya. Berdasarkan dari hasil perkalian tersebut, Subjek mengajukan *Claim* bahwa $\begin{pmatrix} 1 & c + ad \\ 0 & bd \end{pmatrix} \in G$.

Tentu saja *Claim* tersebut harus didasari dengan *Warrant* dan *Backing*. Subjek menuliskan pernyataan "karena sesuai dengan format $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ dengan $x = c + ad$ dan $y = bd$". Pernyataan tersebut menjadi sebuah *Warrant* karena secara tidak langsung pernyataan tersebut merupakan definisi dari anggota himpunan G. Namun belum ada yang menjamin bahwa *Warrant* tersebut benar, terdapat beberapa komponen lagi yang perlu ditunjukkan kebenarannya berdasarkan definisi anggota himpunan G, yaitu $c + ad \in \mathbb{R}$ dan $bd \neq 0$. Sehingga 2 hal tersebut menjadi *Backing* yang memperkuat *Warrant* yaitu definisi anggota himpunan G. *Backing* tersebut juga harus diperkuat karena harus dipastikan apakah benar $c + ad, bd \in \mathbb{R}$ dan $bd \neq 0$. Sehingga dibuat 2 argumen baru dengan *Claim* pertama yaitu $c + ad \in \mathbb{R}$ dan *Claim* kedua yaitu $bd \neq 0$. Untuk *Claim* $c + ad \in \mathbb{R}$, Subjek menggunakan informasi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ untuk digunakan sebagai *Data*. Kemudian pada saat wawancara Subjek memberikan alasan bahwa jika bilangan real dioperasikan akan menghasilkan bilangan real juga, dan pernyataan itu menjadi *Warrant* pada argumen tersebut. Kemudian untuk *Claim* $bd \neq 0$, Subjek menggunakan infromasi $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ untuk digunakan sebagai *Data*.

Kemudian pada saat wawancara juga Subjek memberikan alasan bahwa jika dua bilangan real yang tidak nol dikalikan hasilnya juga tidak nol, dan pernyataan itu menjadi sebuah *Warrant* pada argumen tersebut. Secara keseluruhan Subjek merasa yakin dengan pembuktian yang telah dikonstruksi tersebut benar, karena telah menggunakan metode pembuktian deduktif dan tidak terdapat kesalahan konsep maupun penghitungan sehingga muncul komponen *Qualifier* yaitu Subjek yakin dengan *Claim* yang dibuatnya.

Langkah terakhir adalah membuat struktur argumentasi yang dikonstruksi oleh Subjek. Aberdein (2005) menyarankan bahwa struktur dari sebuah argumentasi dapat diungkap dengan lebih jelas dengan cara merantai pasangan *Data*-*Claim* yang dihubungkan dengan pasangan *Warrant*-*Backing* dalam sebuah pembuktian. Gambar 7 di bawah ini merupakan struktur argumentasi yang dikonstruksi Subjek dalam membuktikan sifat ketertutupan.



Gambar 7. Struktur argumentasi subjek dalam membuktikan sifat ketertutupan

Penjelasan mengenai struktur argumentasi yang dikonstruksi Subjek dalam membuktikan sifat ketertutupan pada Gambar 7 tersaji pada Tabel 1 sebagai berikut.

Tabel 1. Deskripsi struktur argumentasi subjek

Kode	**Pernyataan**

Argumen 1	
D1	$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right\}$ dengan operasi perkalian
Q	Yakin
C1	$(G, \times)$ bersifat tertutup
W1	Untuk $x, y \in G$ maka $xy \in G$
B1	Argumen 2 sampai argumen 5
Argumen 2	
D2	$X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $b, d \neq 0$
C2	$XY = \begin{pmatrix} 1 & c + ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}$
W2	Operasi perkalian matriks
Argumen 2	
D3	$XY = \begin{pmatrix} 1 & c + ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}$
C3	$\begin{pmatrix} 1 & c + ad \\ 0 & bd \end{pmatrix} \in G$
W3	Sesuai dengan format, $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ dengan $x = c + ad$ dan $y = bd$
B3	$c + ad \in \mathbb{R}, bd \in \mathbb{R}$ dan $bd \neq 0$
Argumen 4	
D4	$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $b, d \neq 0$
C4	$c + ad \in \mathbb{R}, bd \in \mathbb{R}$
W4	Jika bilangan real dioperasikan akan menghasilkan bilangan real
Argumen 5	
D5	$b \neq 0$ dan $d \neq 0$
C5	$bd \neq 0$
W5	Dua bilangan real tak nol dikalikan hasilnya juga bilangan real tak nol

Berdasarkan hasil pekerjaan Subjek dalam mengonstruksi bukti pada sifat ketertutupan, Subjek telah berhasil menunjukkan bahwa operasi perkalian di G bersifat tertutup, dengan menggunakan bukti yang bersifat deduktif. Model Argumentasi Toulmin memiliki komponen penting yang digunakan dalam pembuktian deduktif. Pertama adalah *Data*, merupakan informasi yang terdapat pada soal. Subjek dapat memahami informasi tersebut yang digunakan sebagai dasar untuk mengajukan *Claim*, tanpa *Data* yang benar, *Claim* yang dibuat tidaklah berarti. *Claim* merupakan pernyataan yang ingin dibuktikan. *Claim* ini haruslah jelas dan spesifik agar pembuktian dapat dilakukan secara efektif. Namun terkadang *Claim* tersaji secara implisit. Pada beberapa sub argumen subjek tidak menuliskan secara eksplisit “akan ditunjukkan” pada setiap sub argumen. Oleh karena itu, argumen yang dikonstruksi oleh subjek dipecah menjadi beberapa sub argumen agar dapat mengidentifikasi argumen lebih detail. Selanjutnya, *Warrant* atau pernyataan yang menjamin *Claim* harus logis dan relevan dengan *Claim* yang diajukan. *Warrant* dapat berupa definisi maupun teorema (Faizah dkk., 2020). Namun pada hasil jawaban subjek, terdapat beberapa *Warrant* yang tersaji secara implisit. Sebagai contoh ketika Subjek mengambil 2 anggota G kemudian dioperasikan menghasilkan suatu matriks, Subjek tidak menuliskan *Warrant*, namun secara implisit *Warrant* yang digunakan adalah definisi operasi perkalian matriks. Karena Subjek mampu menghitung perkalian matriks dengan benar, artinya Subjek mampu menggunakan *Warrant* dengan benar. *Warrant* tersebut diperkuat dengan adanya *Backing*.

Backing merupakan inti dari pembuktian, yaitu untuk menunjukkan bahwa jika mengambil 2 anggota himpunan G kemudian dioperasikan, hasil operasinya tetap berada pada himpunan G. Pada argumen yang dikonstruksi Subjek tersebut, *Backing* 1 terdiri dari beberapa sub argumen yang kompleks dan saling berhubungan antara satu dengan lainnya. Struktur argumen yang dihasilkan oleh subjek tidaklah unik dan dapat bervariasi, mungkin bisa lebih sederhana dan mungkin bisa lebih kompleks. Hal ini disebabkan oleh munculnya sub argumen karena *Warrant* yang digunakan perlu dibuktikan (Conner dkk., 2014). Knipping & Reid (2019) menyebut sub argumen tersebut sebegai *local argument*. *Backing* 1 menjelaskan mengapa *Warrant* 1 benar. Chen & Wang (2016) menjelaskan bahwa validitas argumen sangat bergantung pada *Backing* (valid atau tidaknya suatu argumen), dalam hal ini *Backing* sebagai salah satu komponen dalam Model Argumentasi Toulmin memegang peranan penting dalam menentukan kebenaran suatu *Claim* (Laamena & Nusantara, 2019). Kemudian tingkat keyakinan (*Qualifier*) Subjek terhadap pembuktian yang telah dikonstruksi adalah dengan kata "yakin", karena Subjek sudah menggunakan pembuktian deduktif dan tidak ada kesalahan yang dilakukan. *Rebuttal* berfungsi sebagai penentang dari suatu pernyataan atau ketidakberlakuan suatu pernyataan secara umum (Tristanti & Nusantara, 2021). Namun, sanggahan tidak selalu muncul dalam argumen matematika, pada kasus permasalahan yang digunakan pada penelitian ini tidak memunculkan *Rebuttal*. Hal ini dikarenakan tidak semua argumen dalam pembuktian matematika memerlukan rebuttal (Lin, 2018). Berdasarkan argumen subjek, komponen *Rebuttal* tidak muncul karena tidak ada kondisi dimana *Claim* yang diajukan oleh Subjek tidak berlaku.

Model Argumentasi Toulmin telah memberikan perspektif teoretis kepada para peneliti tentang argumen yang melibatkan konseptualisasi argumen dalam hal komponen-komponen yang saling terkait. Keuntungan bagi para peneliti pada bidang matematika dalam menggunakan kerangka kerja ini adalah kerangka kerja ini dapat digunakan untuk menilai kualitas argumentasi dalam hal mengidentifikasi banyak komponen, sehingga kompleksitas argumen yang digunakan. Dengan cara ini, Model Argumentasi Toulmin dapat diterapkan pada argumen tertulis dan transkrip diskusi lisan. Keterbatasan kerangka kerja ini adalah bahwa *Claim* maupun *Warrant* terkadang tersaji secara implisit, ditambah lagi dengan identifikasi *Data*, *Warrant* dan *Backing* yang bisa jadi ambigu tergantung pada perspektif peneliti.

KESIMPULAN

Pemahaman subjek terkait sifat ketertutupan suatu grup bisa tergambar dari argumen yang dikonstruksi yang kemudian diidentifikasi dengan Model Argumentasi Toulmin. Subjek mampu menggunakan *Data* dengan benar, mengajukan *Claim* yang bernilai benar, memberikan alasan dengan terkait *Claim* tersebut. Namun penelitian ini hanya terbatas pada subjek yang membuktikan dengan pembuktian deduktif pada sifat ketertutupan. Masih perlu dilakukan banyak penelitian lagi untuk mengetahui bagaimana mahasiswa membuktikan dengan pembuktian induktif, kemudian pembuktian pada sifat-sifat grup lainnya seperti sifat Asosiatif, Identitas, dan Invers. Dengan mengetahui struktur pembuktian yang dikonstruksi oleh mahasiswa, dapat menjadi pertimbangan bagi dosen untuk merancang pembelajaran yang memfasilitasi mahasiswa untuk meningkatkan kemampuan argumentasinya pada pembuktian sifat-sifat grup

UCAPAN TERIMA KASIH

Peneliti mengucapkan terima kasih semua pihak yang telah membantu peneliti menyelesaikan penelitian ini, terutama kepada kedua orang tua dan kepada kedua dosen pembimbing, Dr. Sudirman, M.Si dan Dr. Rustanto Rahardi, M.Si, yang telah memberikan bimbingan dan arahan dalam proses penyusunan artikel ini. Ucapan terima kasih juga peneliti sampaikan kepada Departemen Matematika Univeristas Negeri Malang yang telah berkenan menjadi tempat bagi peneliti untuk melakukan penelitian ini.

REFERENSI

Aaidati, I. F., Subanji, S., Sulandra, I. M., & Permadi, H. (2022). Student Argumentation Structure in Solving Statistical Problems Based on Adversity Quotient. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *16*(2), 121–140. https://doi.org/10.22342/jpm.16.2.16633.121-140

Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation*, *19*(3), 287–301. https://doi.org/10.1007/s10503-005-4417-8

Arnawa, I. M., Yanita, Ginting, B., Yerizon, & Nita, S. (2020). Improvement a positive attitude towards abstract algebra through APOS theory approach. *Journal of Physics: Conference Series*, *1503*(1), 012008. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1503/1/012008

Astuti, A., & Zulhendri, Z. (2017). Analisis Kesulitan Belajar Struktur Aljabar pada Mahasiswa Semester III Jurusan Pendidikan Matematika STKIP Pahlawan Tuanku Tambusai Riau Tahun Ajaran 2015/2016. *Jurnal Cendekia : Jurnal Pendidikan Matematika*, *1*(1), 17–23. https://doi.org/10.31004/CENDEKIA.V1I1.5

Banegas, J. A. (2013). *Argumentation in Mathematics BT - The Argument of Mathematics* (A. Aberdein & I. J. Dove, Ed.; hlm. 47–60). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6534-4_4

Bizup, J. (2009). The uses of toulmin in composition studies. *College Composition and Communication*, *61*(1), 1–23.

CadwalladerOlsker, T. (2011). What Do We Mean by Mathematical Proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, *1*(1), 33–60. https://doi.org/10.5642/jhummath.201101.04

Chen, Y. T., & Wang, J. H. (2016). Analyzing with Posner's Conceptual Change Model and Toulmin's Model of Argumentative Demonstration in Senior High School Students' Mathematic

Learning. *International Journal of Information and Education Technology*, *6*(6), 457–464. https://doi.org/10.7763/IJIET.2016.V6.732

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation : A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educ Stud Math*, *86*(2014), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, S., & Rahardi, R. (2020). Exploring students' thinking process in mathematical proof of abstract algebra based on Mason's framework. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, *8*(2), 871–884. https://doi.org/10.17478/JEGYS.689809

Faizah, S., Rahmawati, N. D., & Murniasih, T. R. (2021). Investigasi Struktur Argumen Mahasiswa Dalam Pembuktian Aljabar Berdasarkan Skema Toulmin. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *10*(3), 1466. https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i3.3781

Findell, B. (2001). Learning and understanding in abstract algebra. *Doctoral Dissertations*. https://scholars.unh.edu/dissertation/51

Hamami, Y., & Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM - Mathematics Education*, *52*(6), 1113–1126. https://doi.org/10.1007/S11858-020-01159-5/FIGURES/1

Hanna, G. (2018). Reflections on Proof as Explanation. Dalam A. J. Stylianides & G. Harel (Ed.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (hlm. 3–18). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_1

Isnarto, Wahyudin, Suryadi, D., & Dahlan, J. A. (2014). Students' Proof Ability: Exploratory Studies of Abstract Algebra Course. *International Journal of Education and Research*, *2*(6). www.ijern.com

Knipping, C., & Reid, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. Dalam G. Kaiser & N. Presmeg (Ed.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (hlm. 3–31). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1

Laamena, C. M., & Nusantara, T. (2019). Prospective mathematics teachers' argumentation structure when constructing a mathematical proof: The importance of backing. *Beta: Jurnal Tadris Matematika*, *12*(5), 43–59. https://doi.org/10.20414/betajtm.v12i1.272

Lee, K. S. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 26–44. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2015.11.005

Lin, P.-J. (2018). The Development of Students' Mathematical Argumentation in a Primary Classroom. *Educação & Realidade*, *43*(3), 1171–1192. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/2175-623676887

Moore, R. C. (2016). Mathematics Professors' Evaluation of Students' Proofs: A Complex Teaching Practice. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 2016 2:2*, *2*(2), 246–278. https://doi.org/10.1007/S40753-016-0029-Y

Nadlifah, M., & Prabawanto, S. (2017). Mathematical Proof Construction: Students' Ability in Higher Education. *Journal of Physics: Conference Series*, *895*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012094

Pala, O., Aksoy, E., & Narli, S. (2021). Can the Proof Image Exist in the Absence of the Formal Proof?: Analyses of an Unsuccessful Proving Attempt. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *15*(1), 1–31. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.843527

Pramasdyahsari, A. S., Buchori, A., & Rasiman, R. (2022). Mathematical Proving Ability of Pre-service Teachers in Online and Blended Learning. *KnE Social Sciences*, *2022*, 1021–1031–1021–1031. https://doi.org/10.18502/KSS.V7I14.12052

Rabin, J. M., & Quarfoot, D. (2021). Sources of Students' Difficulties with Proof By Contradiction. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *8*(3), 521–549. https://doi.org/10.1007/S40753-021-00152-X/TABLES/3

Thomas, M. O. J., Druck, I. de F., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 265–284. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_18

Toulmin, S. E. (2003). The uses of argument: Updated edition. Dalam *The Uses of Argument: Updated Edition*. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Tristanti, L. B., & Nusantara, T. (2021). *Argumen dalam Pembuktian*. Penerbit Deepublish.

Wasserman, N., Weber, K., Villanueva, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2018). Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 74–89. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2018.01.004

Wittmann, E. C. (2021). When Is a Proof a Proof? *Connecting Mathematics and Mathematics Education*, 61–76. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_5